

ΕΥΓΕΝΙΑ Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Δ. ΣΙΑΦΑΡΙΚΑΣ†
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΩΝ

2η Έκδοση

ΠΑΤΡΑ 2011

Τίτλος πρωτοτύπου: Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές Αυτών

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος βιβλίου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της διεθνούς σύμβασης Βέρνης-Παρισίου που κυρώθηκε με το ν. 100/1975.

ISBN: 978-960-93-2533-2

Copyright © 2η έκδοσης, Ευγενία Ν. Πετροπούλου, 2011

Αποκλειστικός διαθέτης βιβλίου: Ευγενία Ν. Πετροπούλου
Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Μηχανικής
Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 26504 Ρίο, Πάτρα
Τηλ.: (+30)2610996881

e-mail: jenpetro@des.upatras.gr

Ιστοσελίδα: <http://www.des.upatras.gr/amm/petropoulou/personal.html>

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Ιστορικά στοιχεία για τις εξισώσεις διαφορών	1
1.2	Εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών	5
2	Βασικές έννοιες και ορισμοί	7
	Ασκήσεις	15
3	Εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης	17
3.1	Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης	17
3.1.1	Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με τη μέθοδο της επαναληπτικής διαδικασίας	18
3.1.2	Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με τη μέθοδο του αθροισίμου παράγοντα	24
3.1.3	Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων	26
3.1.4	Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές και σταθερό μη ομογενή όρο	28
	Ασκήσεις	31
3.2	Μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης	32
3.2.1	Ομογενείς εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης	33
	Ασκήσεις	35
3.2.2	Εξισώσεις της μορφής $(y_{n+1})^{\gamma_1(n)}(y_n)^{\gamma_2(n)} = f_n$	35
	Ασκήσεις	37
3.2.3	Εξισώσεις διαφορών τύπου Riccati	38
	Ασκήσεις	45
3.2.4	Εξισώσεις διαφορών τύπου Bernoulli	46
	Ασκήσεις	49
3.2.5	Εξισώσεις διαφορών τύπου Clairaut	49

Ασκήσεις	52
3.3 Ποιοτική μελέτη εξισώσεων διαφορών	53
3.3.1 Σημεία ισορροπίας	53
3.3.2 Η γεωμετρική μέθοδος cobweb	55
Ασκήσεις	60
4 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης	61
4.1 Γενική θεωρία γραμμικών εξισώσεων διαφορών	61
4.1.1 Εισαγωγή	61
4.1.2 Γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις	63
4.1.3 Ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών	69
Ασκήσεις	71
4.2 Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές	71
4.2.1 Ομογενείς εξισώσεις διαφορών	72
Ασκήσεις	76
4.2.2 Μη ομογενείς εξισώσεις διαφορών	77
4.2.2.1 Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών	77
4.2.2.2 Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων	82
Ασκήσεις	88
4.3 Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με μη σταθερούς συντελεστές	88
4.3.1 Επίλυση ομογενών γραμμικών εξισώσεων διαφορών με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης	89
4.3.2 Υποβιβασμός τάξης μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών	90
Ασκήσεις	93
4.3.3 Εξισώσεις διαφορών τύπου Euler	94
Ασκήσεις	96
5 Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με χρήση του z μετασχηματισμού	97
5.1 Ο z μετασχηματισμός και ο αντίστροφος z μετασχηματισμός	97
Ασκήσεις	109
5.2 Επίλυση εξισώσεων διαφορών και συστημάτων εξισώσεων διαφορών με χρήση του z μετασχηματισμού	110
Ασκήσεις	113

6	Προσέγγιση διαφορικών εξισώσεων από εξισώσεις διαφορών	115
6.1	Εισαγωγή	115
6.2	Οι έννοιες της συμβατότητας, της ευστάθειας και της σύγκλισης ενός αριθμητικού σχήματος	123
6.3	Το αριθμητικό σχήμα του Euler	126
6.4	Τα αριθμητικά σχήματα Runge-Kutta	128
6.4.1	Το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta 2ης τάξης	129
6.4.2	Το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta 4ης τάξης	132
	Ασκήσεις	134
7	Εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών	137
7.1	Υπολογισμός των τριγωνικών αριθμών	137
7.2	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	138
7.3	Υπολογισμός οριζουσών	139
7.4	Το πρόβλημα του πύργου του Hanoi	141
7.5	Διάσπαση ραδιενεργών ουσιών	144
7.6	Παραγωγή ερυθρών αιμοσφαιρίων	145
7.7	Φαρμακολογία-Δόσεις φαρμάκων	147
7.8	Η εξίσωση διαφορών Fibonacci	149
7.9	Το εθνικό εισόδημα μιας χώρας	152
7.10	Διάφορα προβλήματα	154
	-Ένα πρόβλημα γεωμετρίας	154
	-Ένα πρόβλημα πιθανοτήτων	155
	-Θερμοκρασία ενός μπουκαλιού μπίρας	157
	-Ένας πληθυσμός ορτυκιών	159
	-Συνεχής ανατοκισμός κεφαλαίων	160
	-Ένα οικονομικό μαθηματικό πρότυπο ζήτησης-προσφοράς	161
	Ασκήσεις	162
	Παράρτημα Α: Λογισμός Διαφορών	165
A.1	Οι τελεστές Δ και E	165
	Ασκήσεις	169
A.2	Στοιχειώδεις πράξεις με τους τελεστές διαφορών	170
	Ασκήσεις	175
A.3	Παραγοντικά πολυώνυμα	176
	Ασκήσεις	182
A.4	Ο τελεστής Δ^{-1} και ο λογισμός των αθροισμάτων	182
	Ασκήσεις	193

A.5 Οι τελεστές ∇ και δ	193
Ασκήσεις	194
Παράρτημα Β: Προγράμματα σε Mathematica	197
B.1 Το διάγραμμα cobweb	197
B.2 Το αριθμητικό σχήμα Euler	198
B.3 Το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta δεύτερης τάξης	199
B.4 Το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta τέταρτης τάξης	200
Βιβλιογραφία	201
Απαντήσεις των ασκήσεων	205
Ευρετήριο	212