ΕΥΓΕΝΙΑ Ν. ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΕΝΤΟΛΩΝ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ ΣΥΜΒΟΛΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ `MUPAD` ΤΗΣ `MATLAB`

ΠΑΤΡΑ 2020

Τίτλος πρωτοτύπου: Συνοπτικός οδηγός εντολών του πακέτου συμβολικών υπολογισμών `MuPAD` της `Matlab`.

Στοιχεία Συγγραφέα: Ευγενία Ν. Πετροπούλου
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 26504 Ρίο, Πάτρα
Τηλ.: (+30)2610962564
e-mail: jenpetr@upatras.gr
Ιστοσελίδα: http://petropoulou.civil.upatras.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα μαθήματα «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ» και «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ» που διδάσκονται στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, περιλαμβάνουν και τη διδασκαλία εργαστηρίων με χρήση του πακέτου συμβολικών υπολογισμών `MuPAD` της `Matlab`. Οι εργαστηριακές ασκήσεις σε αυτά τα δύο μαθήματα άπτονται τόσο μαθηματικών προβλημάτων, όσο και προβλημάτων της επιστήμης του πολιτικού μηχανικού.

Στόχος αυτών των σημειώσεων, είναι να παρουσιασθούν με συνοπτικό τρόπο μερικές από τις πιο βασικές εντολές του πακέτου `MuPAD` έκδοσης R2013b. Η σχετική βιβλιογραφία είναι απολύτως ενδεικτική και περιλαμβάνει μερικά μόνο από τα εξειδικευμένα βιβλία που διατίθενται για τη `Matlab` και το `MuPAD`. Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί και από την επίσημη ιστοσελίδα της `MathWorks`, που είναι η

https://www.mathworks.com

Πάτρα, Απρίλιος 2020

Ευγενία Ν. Πετροπούλου

Περιεχόμενα

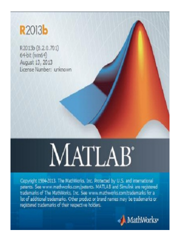
Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Λίγα λόγια για το MuPAD

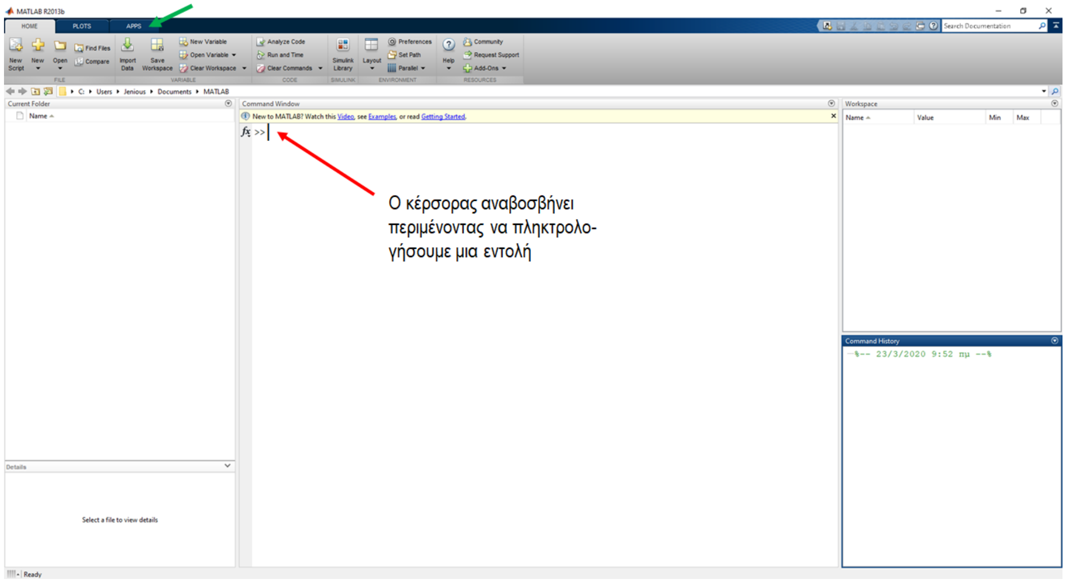
Το `Matlab` (Matrix Laboratory) είναι ένα ευρέως διαδεδομένο υπολογιστικό πρόγραμμα και ταυτόχρονα μια πολύ πετυχημένη γλώσσα προγραμματισμού, για την υλοποίηση αλγορίθμων και αριθμητικών μεθόδων. Επιπλέον, διαθέτει ένα πακέτο συμβολικών υπολογισμών, το MuPAD (Multi Processing Algebra Data Tool).

Σχήμα 1.1: Εικονίδιο `Matlab` στην επιφάνεια εργασίας.



Σχήμα 1.2: Εκκίνηση του `Matlab`.

Άλλα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών είναι για παράδειγμα τα `Mapple`, `Mathematica` και `MathCad`. Το `MuPAD`, όπως και όλα τα υπόλοιπα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών, μας επιτρέπουν μεταξύ άλλων να κάνουμε εύκολα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, να υπολογίζουμε αναλυτικά παραγώγους

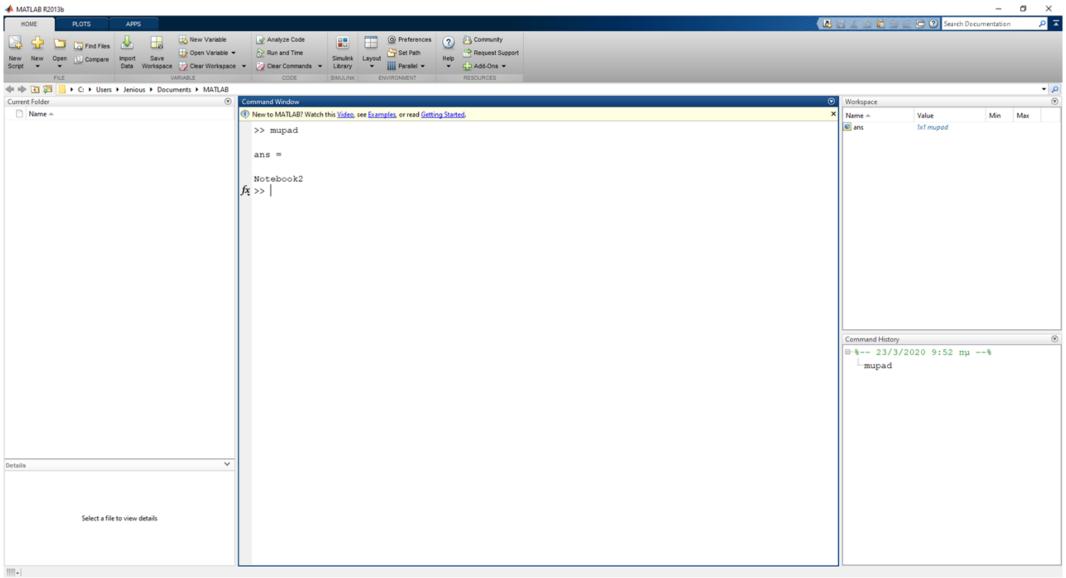


Σχήμα 1.3: Command Window του `Matlab`.

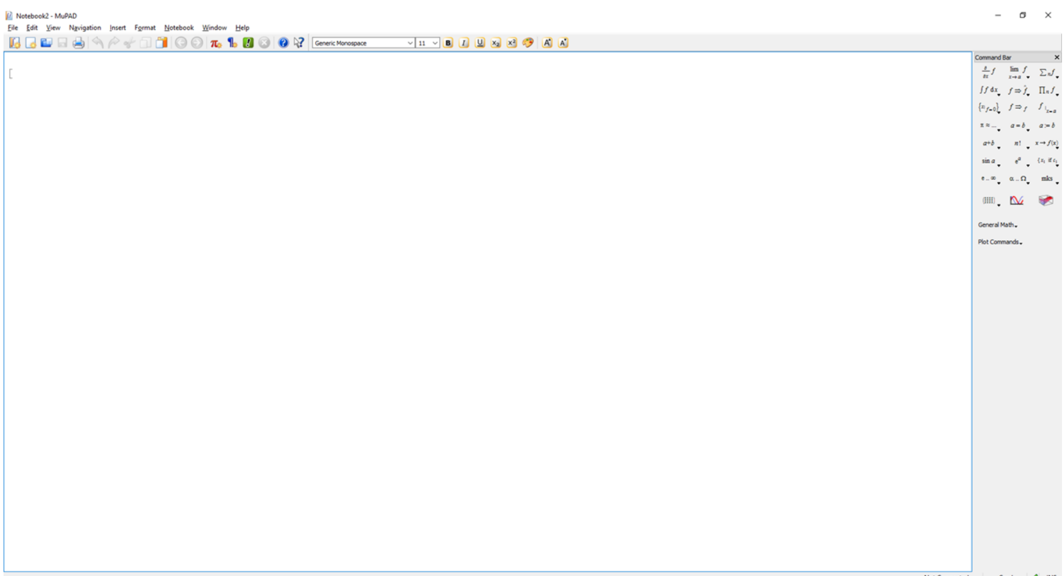
και ολοκληρώματα, να επιλύουμε αναλυτικά εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων, τόσο αλγεβρικών όσο και διαφορικών εξισώσεων, να εκτελούμε πράξεις με πίνακες και διανύσματα, να βρίσκουμε αναλυτικά τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα, κλπ.

Για να ξεκινήσουμε την εργασία μας σε `MuPAD`, εκκινούμε πρώτα το `Matlab`, είτε από το σχετικό εικονίδιο στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή μας (βλ. σχήμα 1.1), είτε επιλέγοντας `Matlab` από το Start Menu του υπολογιστή μας.

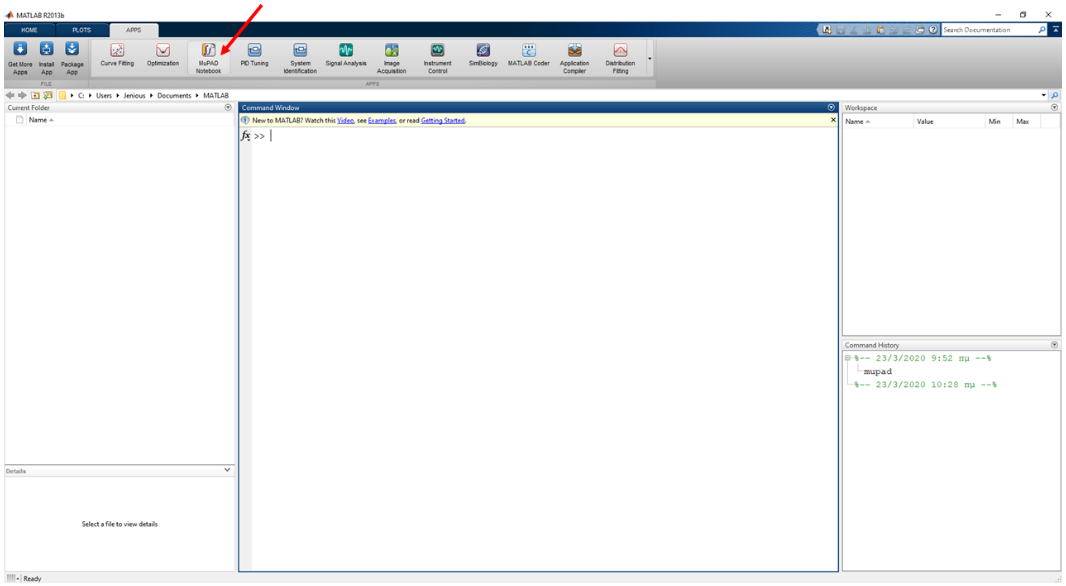
Όταν ξεκινήσει το `Matlab`, βλέπουμε το παράθυρο εντολών Command Window του σχήματος 1.3, όπου ο κέρσορας αναβοσβήνει μετά τα >>. Σ' αυτήν τη θέση πληκτρολογούμε mupad και πατάμε Enter (βλ. σχήμα 1.4), οπότε εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο, βλ. σχήμα 1.5, το οποίο είναι το περιβάλλον εργασίας του `MuPAD`. Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλέξουμε στο Command Window το Menu APPS (βλ. πράσινο βέλος σχήματος 1.3) και στη συνέχεια το εικονίδιο MuPAD Notebook (βλ. σχήμα 1.6), οπότε και πάλι εμφανίζεται το παράθυρο του σχήματος 1.5. Τα αρχεία που δημιουργούμε στο `MuPAD` καλούνται `MuPAD` notebooks ή απλά notebooks και έχουν επέκταση .mn.



Σχήμα 1.4: Command Window του `Matlab` με την εντολή mupad.



Σχήμα 1.5: Το περιβάλλον εργασίας του `MuPAD`.



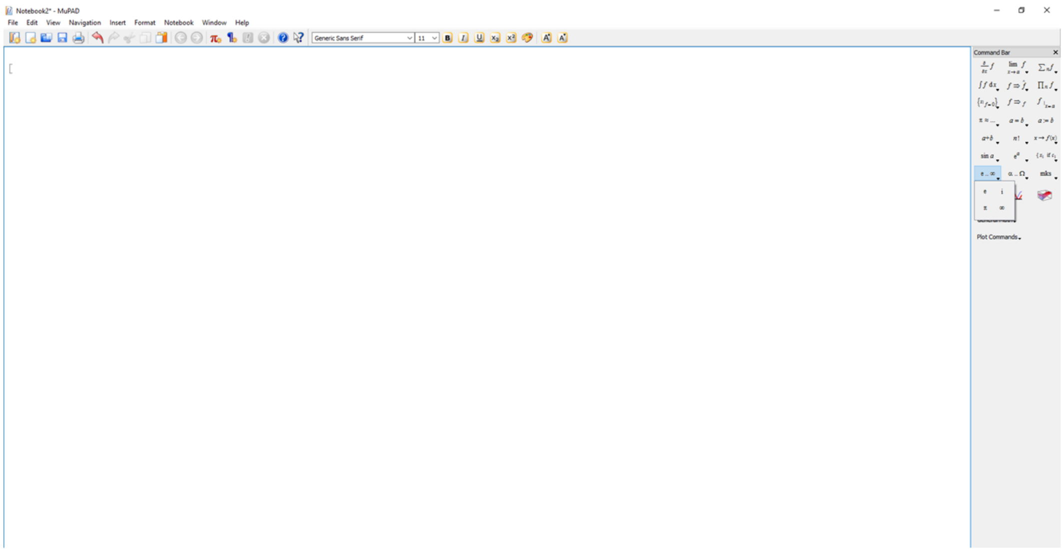
Σχήμα 1.6: Επιλογή του MuPAD Notebook από το Menu APPS.

1.2 Γνωριμία με το περιβάλλον εργασίας

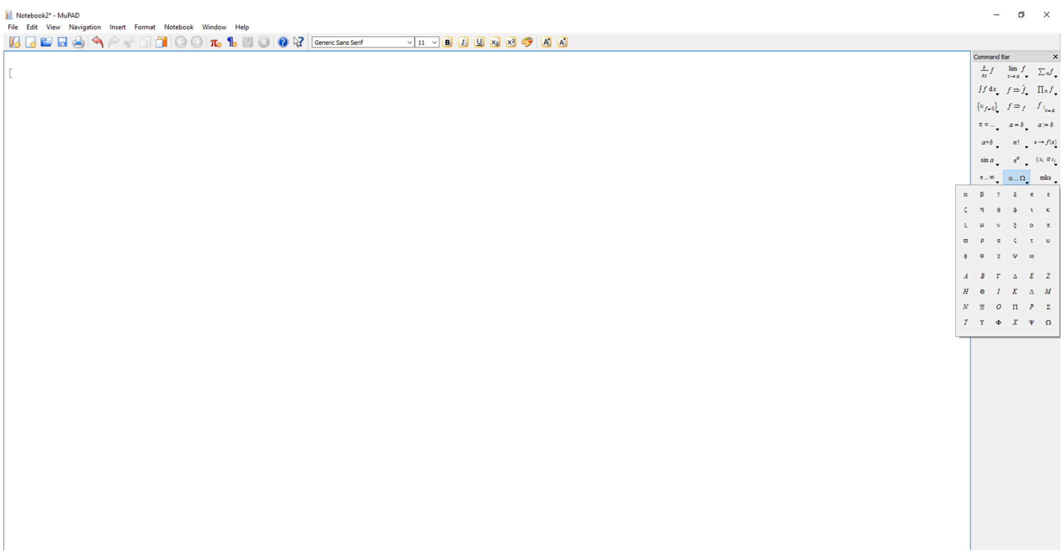
Έχοντας ανοικτό ένα παράθυρο σε `MuPAD`, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν αρκετά Menu που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, καθώς και μια μπάρα εντολών (Command Bar) στο δεξιό μέρος του παραθύρου (βλ. σχήμα 1.5). Η Command Bar είναι ένα είδος «παλέτας» μέσω της οποίας μπορούμε να εισάγουμε έτοιμες εντολές και σύμβολα, κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στα διάφορα «κουμπιά». Ίσως τα πιο χρήσιμα από όλα τα κουμπιά είναι το έβδομο κουμπί της πρώτης και δεύτερης στήλης. Από το μεν πρώτο εισάγουμε ένα από τα βασικά σύμβολα e, i, π, ∞, από το δε δεύτερο, εισάγουμε μικρά ή κεφαλαία γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου, κάνοντας αριστερό κλικ πάνω σε όποιο σύμβολο επιθυμούμε (βλ. σχήματα 1.7 και 1.8). Αν η Command Bar δεν εμφανίζεται αυτόματα, επιλέγουμε από το Menu View, Command Bar (βλ. σχήμα 1.9).

Αναφορικά με τα υπόλοιπα Menu, υπάρχουν αρκετές λειτουργίες που μπορούμε να εκτελέσουμε. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ορισμένες μόνο από αυτές.

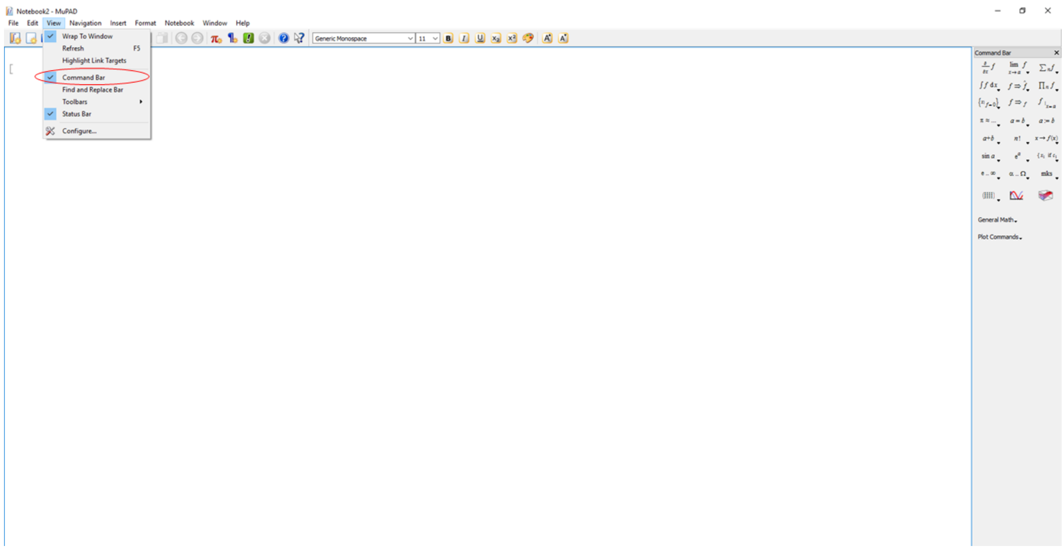
- Από το Menu File μπορούμε να δημιουργούμε νέο notebook (New Notebook), να ανοίγουμε κάποιο υπάρχον notebook (Open), να σώζουμε το



Σχήμα 1.7: Εισαγωγή των βασικών συμβόλων e, i, π, ∞.



Σχήμα 1.8: Εισαγωγή ελληνικών γραμμάτων.

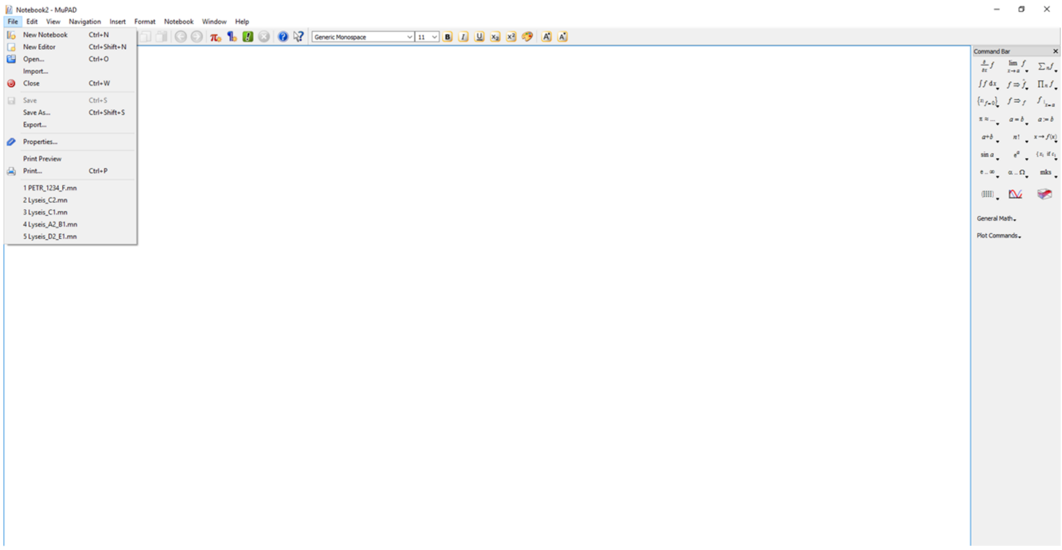


Σχήμα 1.9: Εμφάνιση της «παλέτας» Command Bar.

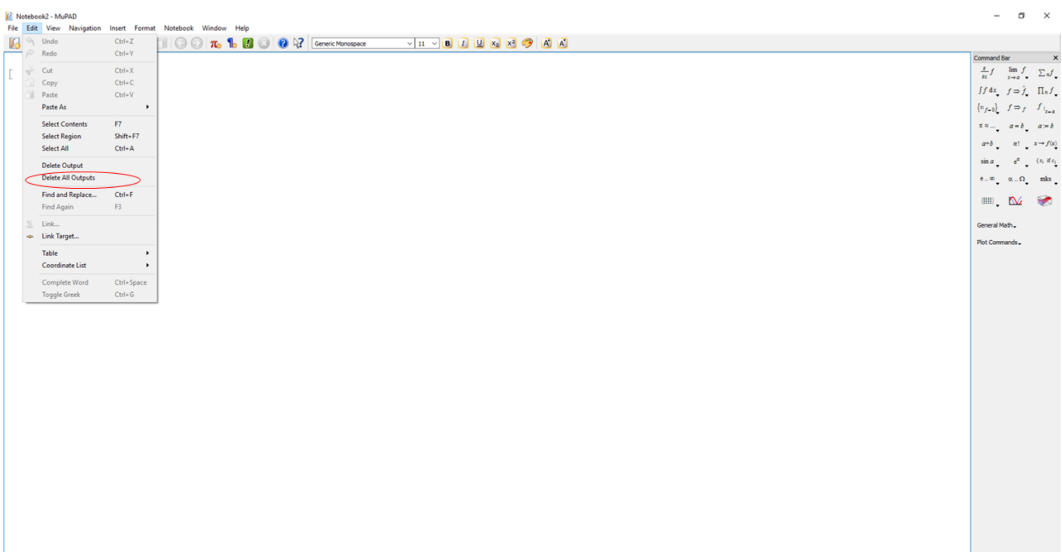
notebook (Save ή Save As) στο οποίο δουλεύουμε, να το εκτυπώνουμε (Print), καθώς και να το σώζουμε ως pdf αρχείο (Export). Επιπλέον, στο κάτω μέρος του Menu εμφανίζονται τα ονόματα των πέντε τελευταίων αρχείων που έχουμε ανοίξει (βλ. σχήμα 1.10).

- Από το Menu Edit μπορούμε να επεξεργαζόμαστε το αρχείο μας, όπως π.χ. να αντιγράφουμε (Copy) και να επικολλούμε (Paste) ότι χρειαζόμαστε. Ίσως η πιο πρακτική λειτουργία αυτού του Menu, είναι η Delete All Outputs, με την οποία διαγράφουμε από την οθόνη όλα τα αποτελέσματα (outputs) των εντολών που έχουμε εκτελέσει. ΠΡΟΣΟΧΗ, όμως, το αποτέλεσμα αυτής της λειτουργίας δεν είναι αναστρέψιμο, δηλαδή αν θέλουμε να επανεμφανιστούν κάποια ή όλα τα αποτελέσματα των εντολών μας, θα πρέπει να τις ξαναεκτελέσουμε (βλ. σχήμα 1.11).

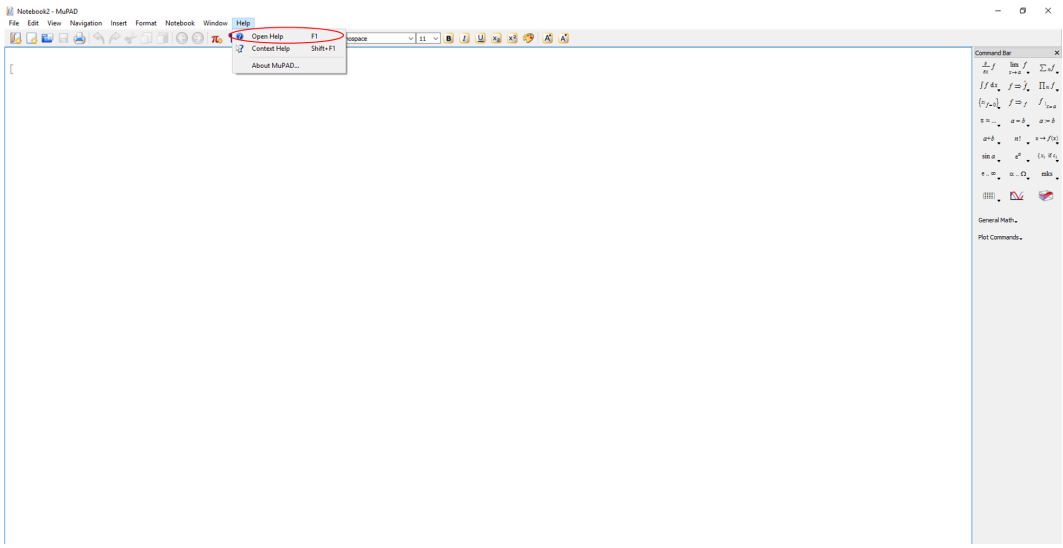
- Από το Menu Help μπορούμε μέσω της λειτουργίας (Open Help) να μεταβούμε στη βοήθεια που διαθέτει το `Matlab` για τις εντολές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο `MuPAD`. (βλ. σχήμα 1.12).



Σχήμα 1.10: File menu.



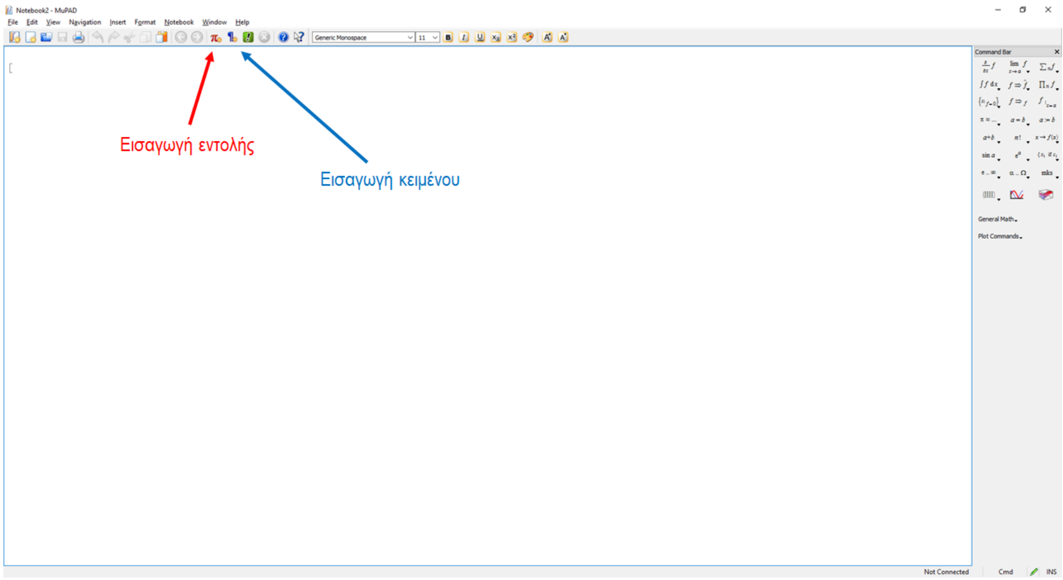
Σχήμα 1.11: Edit menu.



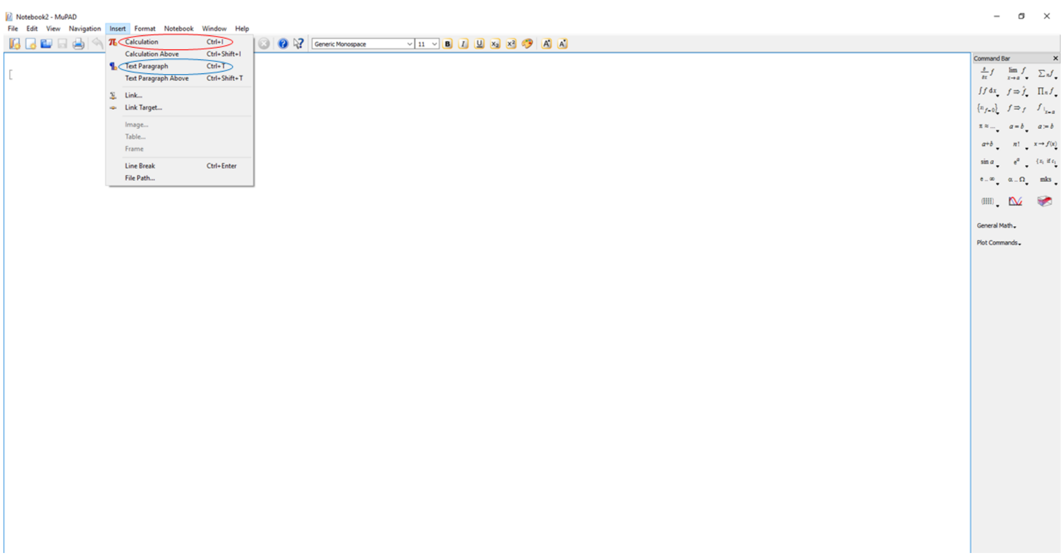
Σχήμα 1.12: Help menu.

Όταν ανοίξουμε ένα notebook σε MuPAD, ο κέρσορας αναβοσβήνει στο λευκό χώρο. Μπορούμε σε αυτόν τον λευκό χώρο να εισάγουμε κείμενο ή κάποια εντολή. Για να εισάγουμε εντολή, κάνουμε αριστερό κλικ πάνω στο κουμπί με το κόκκινο π (βλ. κόκκινο βέλος σχήματος 1.13) και εμφανίζεται να αναβοσβήνει ο κέρσορας στο λευκό χώρο μέσα μια αγκύλη, στην οποία συχνά αναφερόμαστε και με τον όρο κελί (cell). Γράφουμε την εντολή που θέλουμε να εκτελέσουμε, εντός της αγκύλης, και πατάμε Enter, οπότε εμφανίζεται από κάτω από την εντολή το σχετικό output, πάλι μέσα σε αγκύλη. Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλέξουμε από το Menu Insert, τη λειτουργία Calculation (βλ. σχήμα 1.14).

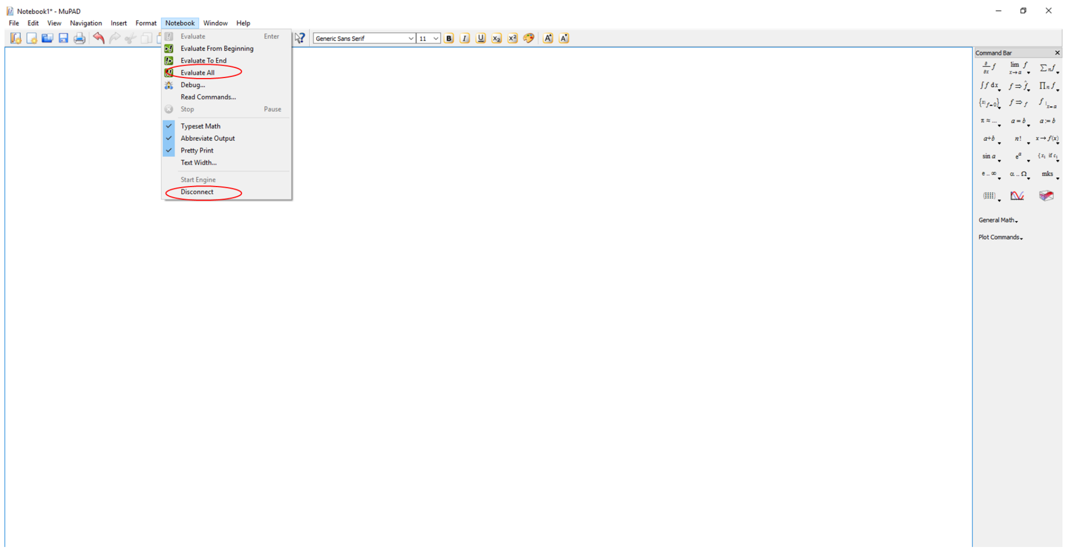
Όλες οι εντολές γράφονται με λατινικούς χαρακτήρες. Αν θέλουμε σε μια εντολή να χρησιμοποιήσουμε και ελληνικούς χαρακτήρες (π.χ. για να συμβολίσουμε με ελληνικό γράμμα μια μεταβλητή), πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιήσουμε τους ελληνικούς χαρακτήρες από την «παλέτα» Command Bar (βλ. σχήμα 1.8). Αν επιθυμούμε να εκτελέσουμε περισσότερες από μία εντολές στο ίδιο κελί, οι εντολές γράφονται η μία μετά την άλλη και χωρίζονται με ;. Αν επιθυμούμε, να ξαναεκτελέσουμε όλες τις εντολές ενός notebook, επιλέγουμε από το Menu Notebook, πρώτα τη λειτουργία Disconnect, με την οποία γίνεται εκκαθάριση της



Σχήμα 1.13: Εισαγωγή εντολών και κειμένου από κουμπιά.



Σχήμα 1.14: Insert menu.

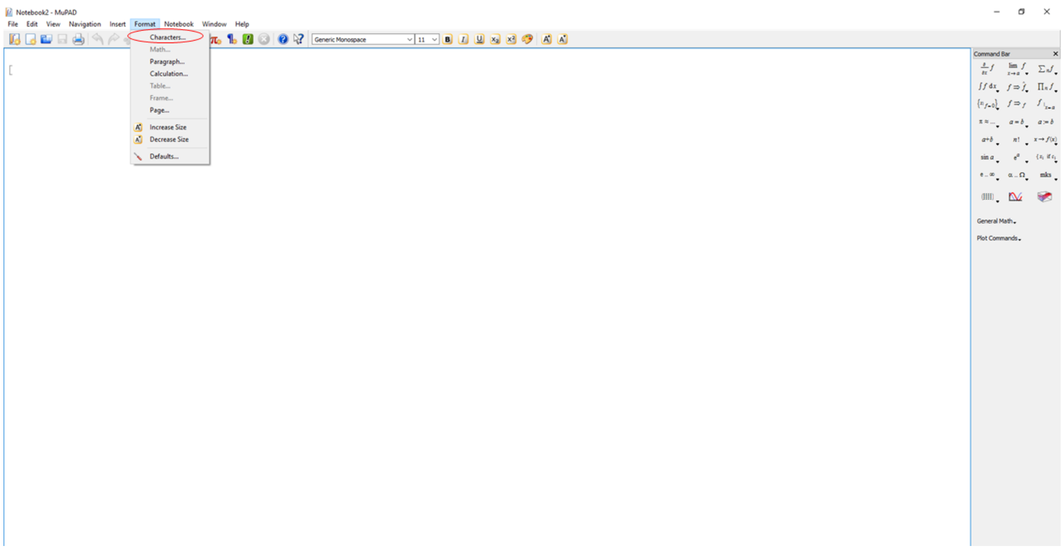


Σχήμα 1.15: Notebook menu.

μνήμης του υπολογιστή για το συγκεκριμένο notebook, και έπειτα επιλέγουμε τη λειτουργία Evaluate All, με την οποία εκτελούνται όλες οι εντολές με τη σειρά, από την πρώτη ως την τελευταία (βλ. σχήμα 1.15).

Για να εισάγουμε κείμενο, κάνουμε αριστερό κλικ πάνω στο κουμπί με το μπλε ¶ (βλ. μπλε βέλος σχήματος 1.13) και εμφανίζεται να αναβοσβήνει ο κέρσορας στο λευκό χώρο, όπου γράφουμε το κείμενό μας. Εναλλακτικά, μπορούμε να επιλέξουμε από το Menu Insert, τη λειτουργία Text Paragraph (βλ. σχήμα 1.14). Τα κείμενα γράφονται είτε στην αγγλική είτε στην ελληνική γλώσσα. Για να μορφοποιήσουμε το κείμενό μας, το μαρκάρουμε και επιλέγουμε από το Menu Format, τη λειτουργία Characters (βλ. σχήμα 1.16). Μέσω αυτής, μπορούμε να αυξήσουμε ή να ελαττώσουμε το μέγεθος της γραμματοσειράς, να δώσουμε έμφαση σε κάποιες λέξεις (bold, underline, italics), κλπ..

Για πολλές από τις προαναφερθείσες λειτουργίες υπάρχουν και κουμπιά (ακριβώς κάτω από τα Menu) που μπορούμε να χρησιμοποιούμε, όπως τα π και ¶, στα οποία αναφερθήκαμε.



Σχήμα 1.16: Format menu.

Κεφάλαιο 2

Υπολογισμοί, λίστες και παραστάσεις

2.1 Αριθμητικοί Υπολογισμοί

Για να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς με τη βοήθεια του `MuPAD` αρκεί να εισάγουμε την αριθμητική έκφραση που θέλουμε και να πατήσουμε Enter[1]. Στη συνέχεια παρατίθενται τα σύμβολα των βασικών αριθμητικών πράξεων, καθώς και η σειρά εκτέλεσης των πράξεων.

◊ Βασικές πράξεις αριθμών	◊ Σειρά εκτέλεσης πράξεων
Πρόσθεση (+)	Παρενθέσεις
Αφαίρεση (−)	Δυνάμεις
Πολλαπλασιασμός (∗)	Πολλαπλ. & διαιρέσεις
Διαίρεση (/)	Προσθέσεις & αφαιρέσεις
Δύναμη (^)	(από αριστερά προς δεξιά)

Π.χ. [$1/10 + 3/5 - 1$

[$-\frac{3}{10}$

[1]Όπως αναφέραμε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, όλες οι εντολές εκτελούνται πατώντας Enter.

Σε περίπτωση που το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού δίνεται σε συμβολική μορφή, μπορούμε να έχουμε την αριθμητική του τιμή με χρήση της εντολής `float`

float

`float`(αριθμητική παράσταση)

Π.χ. [`float`$(1/10+3/5-1)$

[-0.3

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συντριπτική πλειοψηφία των εντολών που χρησιμοποιούμε στο `MuPAD` γράφονται με μικρά γράμματα και ότι γράφεται σε μια εντολή (όνομα εντολής ή μεταβλητής ή συνάρτησης) είναι case sensitive. Επίσης, σχεδόν όλες οι εντολές συντάσσονται ως εξής:

όνομα εντολής (...)

2.2 Διαχείριση παραστάσεων

Για να δώσουμε όνομα σε μια παράσταση και να μπορούμε να την «καλέσουμε» στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το σύμβολο :=

Π.χ. [expression:=$1/10+3/5-1$

[$-\frac{3}{10}$

Γράφοντας σε νέο κελί

[expression

λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

[-0.3

που δηλώνει ότι πλέον με τον όρο expression, ο υπολογιστής θυμάται την παράσταση δεξιά του :=.

Με την εντολή `delete`, διαγράφουμε από τη μνήμη του υπολογιστή όποιες παραστάσεις ή μεταβλητές δεν θέλουμε πια:

delete

`delete`(παράσταση ή μεταβλητή)

Π.χ. [`delete`(expression)

Η εντολή αυτή δεν παράγει κανένα output στην οθόνη, αλλά αν μετά την εκτέλεσή της γράψουμε

[expression

λαμβάνουμε

[expression

δηλαδή ο υπολογιστής δεν «γνωρίζει» πια την παράσταση (expression).

Μπορούμε να δηλώσουμε μια υπόθεση εργασίας με χρήση της εντολής `assume`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

assume

`assume`(Συνθήκη)
ή
`assume`(x Ιδιότητα)

Η εντολή `assume` δεν παράγει κανένα output στην οθόνη.

Π.χ. [`assume`($x > 0$)

Π.χ. [`assume`(x in R_{-})

Φυσικά αν θέλουμε να διαγράψουμε από τη μνήμη του υπολογιστή την υπόθεση που κάναμε, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την εντολή `delete`, δηλαδή θα γράψουμε

[`delete(x)`

Για να αντικαταστήσουμε σε μια παράσταση μια μεταβλητή με μία τιμή ή με μια άλλη μεταβλητή, χρησιμοποιούμε την εντολή `subs`

subs

`subs`(όνομα παράστασης, παλιά ποσότητα=νέα ποσότητα)

Π.χ. [$a := x + 10 - 3 * x\^{}2$

[$-3x^2 + x + 10$

[$\texttt{subs}(a, x = 1)$

[8

[$\texttt{subs}(a, x = b + c)$

[$b + c - 3(b + c)^2 + 10$

Για να αναπτύξουμε μια παράσταση, εκτελώντας όλους τους εμπλεκόμενους πολλαπλασιασμούς, χρησιμοποιούμε την εντολή `expand`

expand

`expand`(παράσταση)

Για να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση, χρησιμοποιούμε την εντολή `factor`

factor

`factor`(παράσταση)

Για να απλοποιήσουμε μια παράσταση, χρησιμοποιούμε την εντολή `simplify`

simplify

`simplify`(παράσταση)

Π.χ. [`expand`$((x+y)\hat{}3)$

[$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

[`factor`$(x\hat{}4 - 3*x\hat{}3 + 6*x\hat{}2 - 12*x + 8)$

[$[(x-1)(x-2))(x^2+4)$

[`simplify`$(4*x + (x-1)*(x-2) + 5*x\hat{}3)$

[$5x^3 + x^2 + x + 2$

Σε κάποιες περιπτώσεις, οι εντολές `simplify`, `expand` και `factor`, μπορεί να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Π.χ. [`expand`$(4*x + (x-1)*(x-2) + 5*x\hat{}3)$

[$5x^3 + x^2 + x + 2$

[`simplify`$(x\hat{}3 + 3*x\hat{}2*y + 3*x*y\hat{}2 + y\hat{}3)$

[$(x+y)^3$

[`factor`$(x\hat{}3 + 3*x\hat{}2*y + 3*x*y\hat{}2 + y\hat{}3)$

[$(x+y)^3$

Υπάρχουν και άλλες πιο εξειδικευμένες εντολές εκτός της `simplify` για άλλου είδους απλοποιήσεις (π.χ. που αφορούν σε τριγωνομετρικούς, εκθετικούς, λογαριθμικούς όρους, κλπ.). Μια τέτοια εντολή, για παράδειγμα, είναι η `combine`

combine

`combine`(παράσταση,`sincos`)
ή
`combine`(παράσταση,`ln`)

Για να λειτουργήσει σωστά η εντολή `combine` για απλοποίηση λογαριθμικών παραστάσεων, θα πρέπει προηγουμένως να δηλωθεί ότι όλες οι υπολογάριθμες ποσότητες είναι θετικές.

Π.χ. [`combine`(`cos`(t)^2-`sin`(t)^2,`sincos`)

[$\cos(2t)$

Π.χ. [`assume`($x > 0$)

[`combine`(`ln`(x)-`ln`(x^2+1),`ln`)

[$\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Μια ακόμη χρήσιμη εντολή για τη διαχείριση παραστάσεων, είναι η εντολή `collect`, η οποία χρησιμοποιείται περισσότερο για την ομαδοποίηση όρων σε παραστάσεις που προκύπτουν κυρίως ως αποτελέσματα άλλων εντολών

collect

`collect`(παράσταση, λίστα με τους όρους ως προς τους οποίους θα γίνει ομαδοποίηση)

Π.χ. [s:=(`cos`(t)-`sin`(t))*c+(`cos`(t)+`sin`(t))*b

[$c(\cos(t) - \sin(t)) + b(\cos(t) + \sin(t))$

[`collect`(s,[`cos`(t), `sin`(t)])

[$(b + c)\cos(t) + (b - c)\sin(t)$

Στην περίπτωση που η παράσταση είναι πολυωνυμική και περιέχει μόνο δυνάμεις του x, η σύνταξη της εντολής `collect` απλοποιείται ως εξής:

collect

`collect`(πολυωνυμική παράσταση του x, x)

2.3 Διαχείριση κλασμάτων

Αν έχουμε μια κλασματική παράσταση, μπορούμε να λάβουμε μόνο τον αριθμητή με την εντολή `numer`

numer

`numer`(κλάσμα)

Μπορούμε να λάβουμε μόνο τον παρονομαστή ενός κλάσματος με την εντολή `denom`

denom

`denom`(κλάσμα)

Μπορούμε να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα με την εντολή `normal`

normal

`normal`(κλάσμα)

Παρατήρηση 2.3.1. Η εντολή `normal` μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε συνδυασμό με τις εντολές `numer` και `denom`.

Μπορούμε να αναλύσουμε ένα κλάσμα σε απλά κλάσματα χρησιμοποιώντας την εντολή `partfrac`

partfrac

`partfrac`(κλάσμα)

Π.χ. [$b := (x\hat{}3 - 6 * x\hat{}2 + 11 * x - 6)/(x\hat{}2 - 1))$

[$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-1}$

[`numer`(b)

[$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

[`denom`(b)

[$x^2 - 1$

[`normal`(b)

[$\frac{x^2-5x+6}{x+1}$

[`numer`(`normal`(b))

[$x^2 - 5x + 6$

[`partfrac`$(1/(x\hat{}4 - 3 * x\hat{}3 + 6 * x\hat{}2 - 12 * x + 8))$

[$\frac{\frac{3x}{(}40)-\frac{1}{20}}{x^2+4} - \frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{8(x-2)}$

2.4 Διαχείριση μιας λίστας

Μια λίστα μπορεί να περιέχει διάφορα αντικείμενα, π.χ. αριθμούς, σύμβολα, συναρτήσεις, κλπ.. Για να δημιουργήσουμε μια λίστα χωρίζουμε τα αντικείμενά της με κόμμα και εσωκλείουμε σε αγκύλες όλα τα αντικείμενα.

Π.χ. Αν θέλουμε μια λίστα με τα γράμματα a, b, c, d με όνομα ls γράφουμε:

[ls:=[a,b,c,d]

και λαμβάνουμε

[[a,b,c,d]

Για να επιλέξουμε κάποιο στοιχείο μιας λίστας, αρκεί να γράψουμε το όνομα της λίστας και στη συνέχεια μέσα σε αγκύλες το θετικό αριθμό εμφάνισης του στοιχείου που μας ενδιαφέρει, μετρώντας από αριστερά, δηλαδή από την αρχή της λίστας. Εναλλακτικά, μέσα στις αγκύλες μπορούμε να γράψουμε τον αρνητικό αριθμό εμφάνισης του στοιχείου που μας ενδιαφέρει, μετρώντας από δεξιά, δηλαδή από το τέλος της λίστας.

Π.χ. Αν θέλουμε το στοιχείο b της προηγούμενης λίστας, γράφουμε

[ls[2]

ή

[ls[-3]

και λαμβάνουμε και στις δύο περιπτώσεις

[b

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις

3.1 Ορισμός και όρια συναρτήσεων

Μια συνάρτηση f μιας μεταβλητής x ορίζεται ως εξής:

Ορισμός συνάρτησης μιας μεταβλητής

f:=x→Τύπος της συνάρτησης

Το → οπουδήποτε το χρησιμοποιούμε, εισάγεται με χρήση των πλήκτρων − και >.

Για να υπολογίσουμε την τιμή της f σε ένα δεδομένο σημείο a, απλώς γράφουμε f(a).

Π.χ. [$f := x- > 1/(x-1)$

[$x \to \frac{1}{x-1}$

Αν θέλουμε να βρούμε τις τιμές της f για $x = 3$ και $x = 1$ γράφουμε

[$f(3)$

[$\frac{1}{2}$

[$f(1)$

[Error: Division by zero. [_invert] Evaluating: f

δηλαδή ο υπολογιστής μας ενημερώνει ότι δεν ορίζεται η f για $x = 1$, επειδή γίνεται διαίρεση με το 0.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει ένα κελί εντολών γράφοντας

[$f(3); f(1)$

με τα ίδια αποτελέσματα.

Στη συνέχεια παρατίθενται οι εντολές για την κλήση μερικών βασικών συναρτήσεων

`abs`	Απόλυτη τιμή
`exp`	Εκθετική συνάρτηση
`ln`	Φυσικός λογάριθμος
`log`(b,x)	Λογάριθμος του x με βάση b
`sqrt`	Τετραγωνική ρίζα
`sin`	Συνάρτηση ημιτόνου
`cos`	Συνάρτηση συνημιτόνου
`tan`	Συνάρτηση εφαπτομένης
`arcsin`	Αντίστροφη συνάρτηση ημιτόνου
`arccos`	Αντίστροφη συνάρτηση συνημιτόνου
`arctan`	Αντίστροφη συνάρτηση εφαπτομένης
`sinh`	Συνάρτηση υπερβολικού ημιτόνου
`cosh`	Συνάρτηση υπερβολικού συνημιτόνου
`tanh`	Συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης
`heaviside`	Βηματική συνάρτηση Heaviside
`dirac`	Συνάρτηση δέλτα του Dirac
`erf`	Συνάρτηση σφάλματος (error function)
`erfc`	Συμπηρωματική συνάρτηση σφάλματος (complementary error function)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε ένα από τα ανωτέρω ονόματα συναρτήσεων είναι στην πραγματικότητα εντολές. Επομένως το όρισμα κάθε συνάρτησης πρέπει να βρίσκεται μεταξύ παρενθέσεων.

Π.χ. [sin(x)

[$\sin(x)$

[sqrt(x)

[$\sqrt{x}$

Προκειμένου να ορίσουμε συναρτήσεις που ο τύπος τους αποτελείται από κλάδους, συνδυάζουμε όσα ήδη αναφέραμε με την εντολή **piecewise**

piecewise

piecewise([1ο διάστημα μεταβλητής, Τύπος συνάρτησης],[2ο διάστημα μεταβλητής, Τύπος συνάρτησης],...,[Τελευταίο διάστημα μεταβλητής, Τύπος συνάρτησης])

Π.χ. [r:=x− >piecewise([x>=0 and x< 1,exp(x)],[x>=1,1+x])

[$x \to$piecewise($[0 \leq x \wedge x < 1, e^x]$,$[1 \leq x, 1+x]$)

Παρατηρούμε ότι δεν εμφανίζεται στην οθόνη ο τύπος της συνάρτησης. Αυτό συμβαίνει γιατί ο υπολογιστής θεωρεί αρκετά περίπλοκο τον τύπο της συνάρτησης ώστε να τον εμφανίσει. Για να δούμε τον τύπο της συνάρτησης στην οθόνη έχουμε δύο επιλογές: Μπορούμε απλώς να γράψουμε

[r(x)

λαμβάνοντας

[$\begin{cases} x+1 & \text{if } 1 \leq x \\ e^x & \text{if } x \in [0,1) \end{cases}$

ή καλύτερα μπορούμε στον ορισμό της συνάρτησης αντί του $->$ να χρησιμοποιήσουμε το $-->$, δηλαδή να γράψουμε

Π.χ. [r:=x−− >piecewise([x>=0 and x< 1,exp(x)],[x>=1,1+x])

λαμβάνοντας

$$[\ x \to \begin{cases} x+1 & \text{if } 1 \leq x \\ e^x & \text{if } x \in [0,1) \end{cases}$$

Φυσικά με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και συναρτήσεις με περισσότερους από δύο κλάδους

Π.χ. [q:=x−− >piecewise([x<= −PI, cos(x)],[−PI<x<= 2∗PI,sin(x)],

[x> 2∗PI,3])

$$[\ x \to \begin{cases} \cos(x) & \text{if } x \leq -\pi \\ 3 & \text{if } 2\pi < x \\ \sin(x) & \text{if } x \in (-\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και χειριζόμαστε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, μια συνάρτηση g των n μεταβλητών x1, x2, ..., xn ορίζεται ως εξής:

Ορισμός συνάρτησης πολλών μεταβλητών

g:=(x1, x2, ..., xn)→Τύπος της συνάρτησης

Για να υπολογίσουμε την τιμή της g σε ένα δεδομένο σημείο (a1, a2, ..., an), απλώς γράφουμε g(a1, a2, ..., an).

Π.χ. [$g := (x, y)- > x\hat{}2 + x * y + y\hat{}2$

$[\ (x, y) \to x^2 + xy + y^2$

Π.χ. [$h := (x, y, z)- > (x + z)/(y\hat{}2 + 1)$

$[\ (x, y, z) \to \frac{x+z}{y^2+1}$

Αν θέλουμε π.χ. να βρούμε τις τιμές $g(-1, 2)$ και $h(3, -1, 0)$ γράφουμε

[$g(-1,2)$

[3

[$h(3,-1,0)$

[$\frac{3}{2}$

Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to x0} f(x)$, χρησιμοποιούμε την εντολή `limit`

limit

```
limit(f(x),x=x0)
```

Για να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x0^+} f(x)$ χρησιμοποιούμε και πάλι την εντολή `limit`, αλλά τώρα προσθέτοντας την επιλογή `Left` ή `Right`

limit

```
limit(f(x),x=x0,Left)
limit(f(x),x=x0,Right)
```

Π.χ. Για τη συνάρτηση $r(x)$ που ορίσθηκε στη σελ. 32, να βρεθούν τα $\lim_{x\to 2} r(x)$, $\lim_{x\to 1^-} r(x)$, $\lim_{x\to 1^+} r(x)$.
Έχουμε

[limit(r(x),x=2)

[3

[limit(r(x),x=1,Left)

[e

[limit(r(x),x=1,Right)

[2

3.2 Παραγώγιση και ολοκλήρωση

Για να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση ή μια έκφραση, χρησιμοποιούμε την εντολή `diff`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

diff

`diff`(Συνάρτηση ή έκφραση, Μεταβλητή ως προς την οποία παραγωγίζουμε $ Αριθμός παραγωγίσεων)

ΕΙΔΙΚΑ για παραγώγους ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ, μπορεί να παραληφθεί το $ 1. Εναλλακτικά, ΚΑΙ ΜΟΝΟ για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο τόνος $'$ για τον υπολογισμό παραγώγων.

Π.χ. [$f := x- >$`cos`(x)

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της $f(x)$ γράφουμε

[`diff`(f(x),x $ 1)

ή

[`diff`(f(x),x)

ή

[$f'(x)$

και λαμβάνουμε

[$-\sin(x)$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τέταρτη παράγωγο της $f(x)$ γράφουμε

[`diff`(f(x),x $ 4)

ή

[$f''''(x)$

και λαμβάνουμε

[$\cos(x)$

Με τον ίδιο τρόπο παραγωγίζουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Π.χ. [$g := (x, y) -> x\hat{}4 + x * y + x\hat{}2 * y\hat{}3$

[$(x, y) \to x^4 + xy + x^2y^3$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 g}{\partial x^2 y}$ γράφουμε

- [`diff`(g(x,y),x)

  [$4x^3 + 2xy^3 + y$

- [`diff`(g(x,y),x \$ 2)

  [$12x^2 + 2y^3$

- [`diff`(g(x,y),x \$ 2,y)

  [$6y^2$

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης ή μιας έκφρασης, χρησιμοποιούμε την εντολή `int`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

int

`int`(Συνάρτηση ή έκφραση, Μεταβλητή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε)

Για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, χρησιμοποιούμε και πάλι την εντολή `int`, προσδιορίζοντας επιπλέον τα όρια ολοκλήρωσης:

int

`int`($f(x)$, x=$\alpha..\beta$)

Η ανωτέρω εντολή χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων, ακόμη και αν κάποιο όριο ολοκλήρωσης είναι ∞.
Π.χ., για τον υπολογισμό του αόριστου ολοκληρώματος $\int \sqrt{x}dx$ γράφουμε

[`int(sqrt(x),x)`

και λαμβάνουμε

[$\frac{2x^{3/2}}{3}$

Παρατηρείστε ότι στο αποτέλεσμα υπολογισμού ενός αόριστου ολοκληρώματος δεν εμφανίζεται η αυθαίρετη σταθερά της ολοκλήρωσης που επιβάλλεται να γράφουμε στο χαρτί μας.

Για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$ γράφουμε

[`int(tan(x),x=0..PI/4)`

και λαμβάνουμε

[$\frac{\ln(2)}{2}$

Για τον υπολογισμό των γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ και $\int_0^\infty e^{-x}dx$ γράφουμε

[`int(1/x,x=0..1)`

[`int(exp(-x),x=0..infinity)`

και λαμβάνουμε

[∞

[1

αντίστοιχα.

3.3 Σειρές και αναπτύγματα Taylor

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{n=m}^{k} f(n)$, χρησιμοποιούμε την εντολή `sum`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

sum

`sum`$(f(n)$, n=$m..k)$

Με την ίδια εντολή υπολογίζουμε και άπειρα αθροίσματα, δηλαδή σειρές, βάζοντας ∞ στη θέση του m ή/και του k.

Π.χ., για τον υπολογισμό των πεπερασμένων αθροισμάτων $\sum_{n=1}^{10}[1+5(n-1)]$ και $\sum_{n=0}^{20}\frac{1}{2^n}$ έχουμε

```
[ sum(1+5*(n-1),n=1..10)

[ 235

[ sum(1/2^n,n=0..20)
```

[$\frac{2097151}{1048576}$

Για τον υπολογισμό των άπειρων αθροισμάτων $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ έχουμε

```
[ sum((2^n-1)/3^n,n=1..infinity)
```

[$\frac{3}{2}$

```
[ sum(x^n/n!,n=0..infinity)
```

[e^x

Για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης $f(x)$, γύρω από το σημείο x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots,$$

χρησιμοποιούμε την εντολή `taylor`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

taylor

`taylor`(Συνάρτηση, $x = x_0$, Τάξη του αναπτύγματος)

Στην περίπτωση όπου $x_0 = 0$, μπορεί να παραληφθεί το $= 0$ από την εντολή. Η προκαθορισμένη τιμή για την τάξη του αναπτύγματος είναι 6, δηλαδή αν δεν γράφουμε τίποτα μετά το $x = x_0$, θα υπολογιστεί το ανάπτυγμα έκτης τάξης της συνάρτησης.

Π.χ. [taylor(exp(x),x=0,4)

[$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$

Π.χ. [taylor(exp(x),x)

[$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$

Π.χ. [taylor(sin(x),x,6)

[$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$

Π.χ. [taylor(ln(x),x=1,2)

[$x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + O((x - 1)^3)$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης $f(x, y)$, γύρω από το σημείο (x_0, y_0):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f|_{(x_0,y_0)} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f|_{(x_0,y_0)}\dots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f|_{(x_0,y_0)}\dots$$

όπου $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, χρησιμοποιώντας την εντολή `mtaylor`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

mtaylor

`mtaylor`(Συνάρτηση, $[x = x_0, y = y_0]$, `AbsoluteOrder` = αριθμός)

Στο υπολογιζόμενο ανάπτυγμα Taylor διατηρούνται δυνάμεις με συνολικό βαθμό έως και `AbsoluteOrder`-1. Επίσης, και εδώ μπορεί να παραληφθεί το $= 0$ αν x_0 ή/και y_0 είναι 0.

Π.χ. [`mtaylor(exp(x+y),[x,y],AbsoluteOrder=3)`

[$\frac{x^2}{2} + xy + x + \frac{y^2}{2} + y + 1$

3.4 Γραφικές παραστάσεις

3.4.1 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που ο τύπος τους δίνεται εκπεφρασμένα

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής, χρησιμοποιούμε την εντολή `plot`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

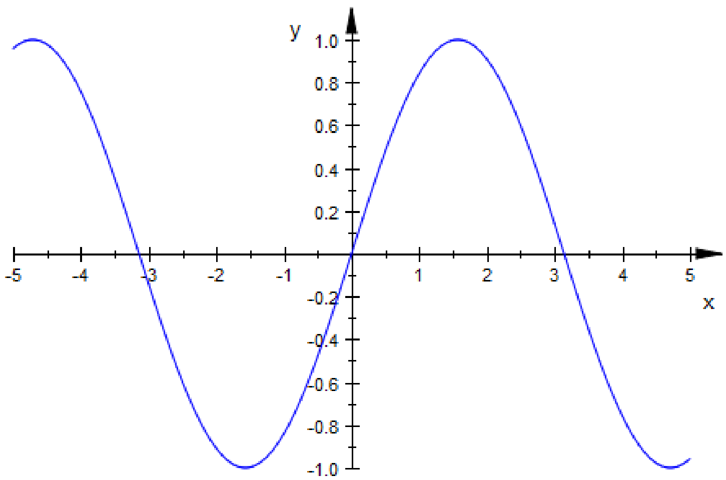
plot

`plot`(Συνάρτηση)

Π.χ., για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin x$ γράφουμε

[`plot(sin(x))`

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.1. Φυσικά μπορούμε να σχεδιάσουμε και συναρτήσεις που ο τύπος τους δίνεται με κλάδους. Π.χ., για



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin(x)$.

να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $r(x)$ που ορίσθηκε στη σελ. 32 γράφουμε

[plot(r(x))

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.2.

Η σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης γίνεται πάντα στο διάστημα $[-5, 5]$, εκτός και αν καθορίσουμε άλλο διάστημα ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής. Αυτό γίνεται τροποποιώντας την εντολή plot ως εξής:

plot

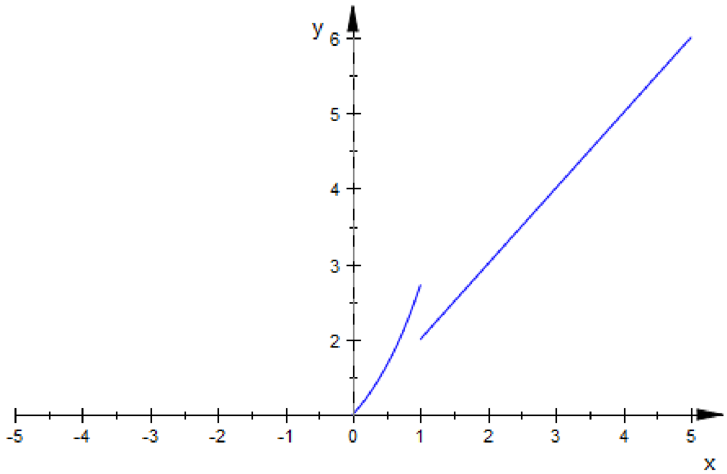
plot(Συνάρτηση, ανεξάρτητη μεταβλητή=αρχική τιμή..τελική τιμή)

Π.χ., για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin(x)$ για $x \in [-4\pi, 4\pi]$ γράφουμε

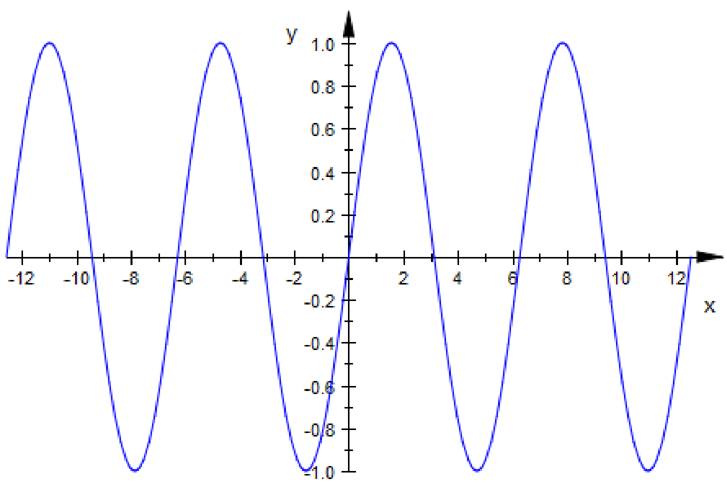
[plot(sin(x),x=-4*PI..4*PI)

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.3.

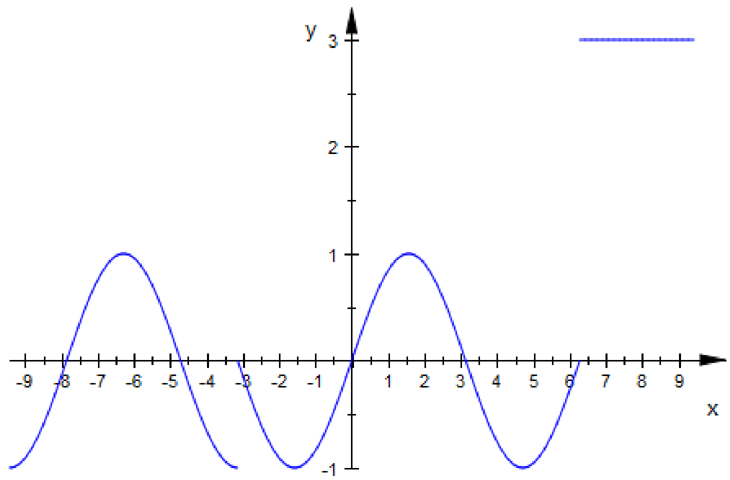
Ομοίως, για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x)$ που ορίσθηκε στη σελ. 32 για $x \in [-3\pi, 3\pi]$ γράφουμε



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $r(x)$ που ορίσθηκε στη σελ. 32.



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin(x)$ για $x \in [-4\pi, 4\pi]$.



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x)$ που ορίσθηκε στη σελ. 32 για $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

[plot(q(x),x=-3*PI..3*PI)

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.4.

Αν επιθυμούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων στο ίδιο σχήμα, η εντολή `plot` τροποποιείται ως εξής:

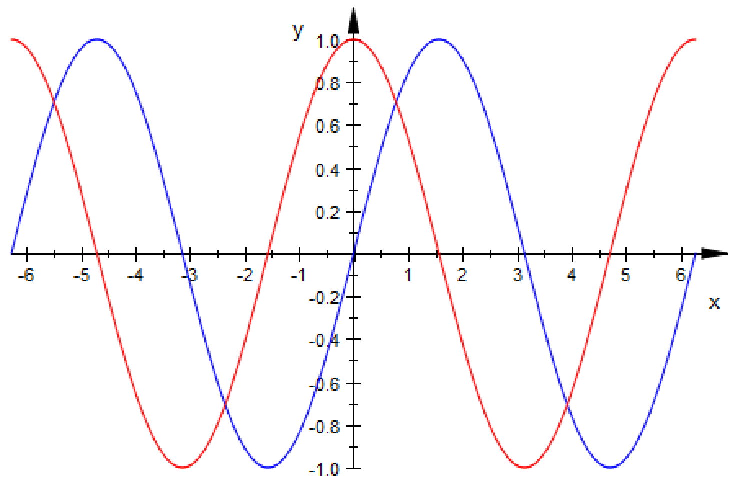
plot

`plot`(1η συνάρτηση, 2η συνάρτηση, κλπ., ανεξάρτητη μεταβλητή=αρχική τιμή..τελική τιμή)

Π.χ., για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$ για $x \in [-2\pi, 2\pi]$ γράφουμε

[plot(sin(x),cos(x),x=-2*PI..2*PI)

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.5, όπου βλέπουμε με κόκκινο χρώμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\cos x$ και με μπλε χρώμα, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin x$.

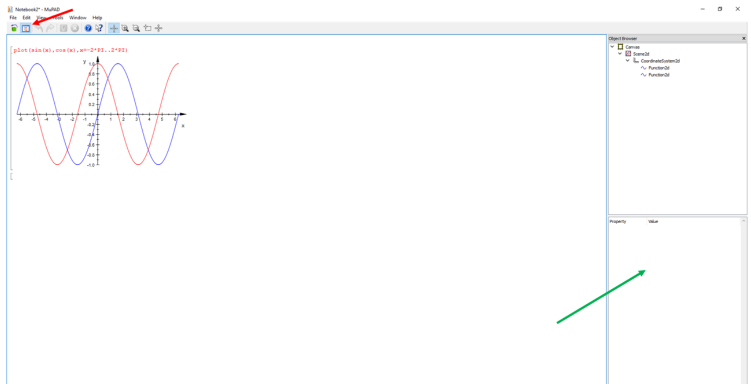


Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$ για $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Κάνοντας δεξιό κλικ επάνω σε οποιαδήποτε γραφική παράσταση εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο, όπου μια πολύ σημαντική διαθέσιμη λειτουργία είναι η Export Graphics. Κάνοντας αριστερό κλικ σε αυτήν τη λειτουργία, μπορούμε να σώσουμε τη γραφική παράσταση ως ξεχωριστό αρχείο τύπου png, jpeg, gif, bmp, tiff, pdf κλπ.

Μπορούμε να μορφοποιήσουμε μια γραφική παράσταση όπως επιθυμούμε, κάνοντας αριστερό κλικ πάνω στη γραφική παράσταση, οπότε εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο εργασίας με όνομα Object Browser (βλ. σχήμα 3.6). Αν το παράθυρο Object Browser δεν εμφανίζεται αυτόματα αφού έχουμε κάνει αριστερό κλικ πάνω στη γραφική παράσταση, πατάμε το κουμπί που δείχνει το κόκκινο βέλος του σχήματος 3.6.

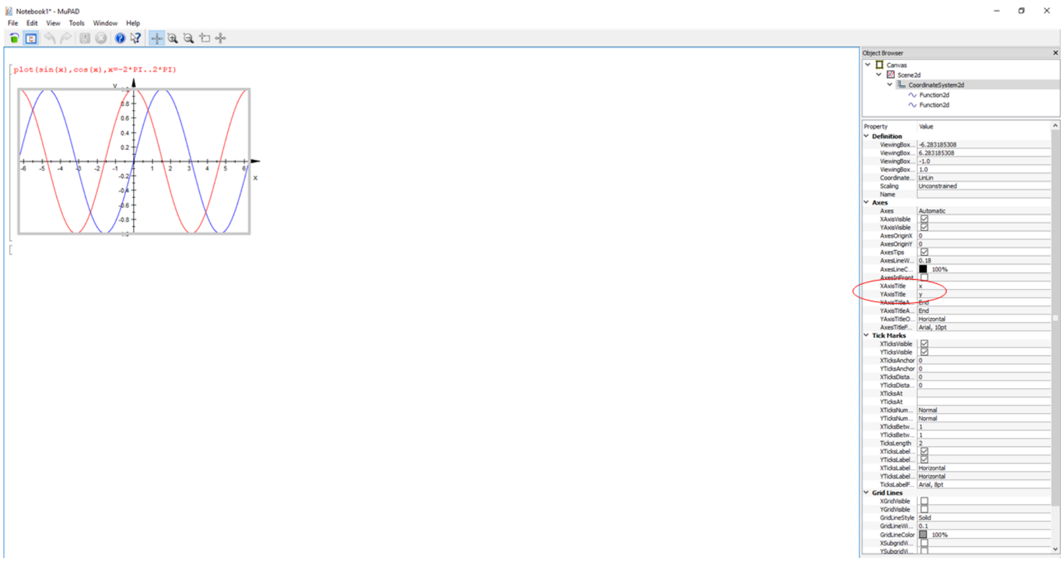
Παρατηρείστε ότι στο δεξιό μέρος της οθόνης εμφανίζεται ένα παράθυρο με διάφορα menu. Επιλέγοντας οποιοδήποτε από αυτά τα menu, εμφανίζεται στον λευκό χώρο κάτω δεξιά μια σειρά από επιλογές (βλ. πράσινο βέλος σχήματος 3.6). Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε το menu CoordinateSystem2d, βλέπουμε κάτω δεξιά τέσσερα νέα menu, τα Definition, Axes, TickMarks και Gridlines. Επιλέγοντας όποιο από αυτά θέλουμε ή και όλα, εμφανίζονται διάφορες επιλογές (βλ. σχήμα 3.7). Για παράδειγμα, μπορούμε να αλλάξουμε τα ονόματα των αξόνων



Σχήμα 3.6: Το παράθυρο εργασίας Object Browser.

από x και y, που είναι η προκαθορισμένη επιλογή σε ότι θέλουμε, μέσω των λειτουργιών XAxisTitle και YAxisTitle, αντίστοιχα.

Αν επιλέξουμε το πρώτο κατά σειρά menu Function2d, βλέπουμε κάτω δεξιά επτά νέα menu, τα Definition, Animation, Annotation, Calculation και Style όπου επιπλέον εμφανίζονται τα υπομenu Lines, Points και Asymptotes. Επιλέγοντας και πάλι όποιο από αυτά θέλουμε ή και όλα, εμφανίζονται διάφορες επιλογές (βλ. σχήμα 3.8). Ταυτόχρονα, «μαρκάρεται» η μπλε γραφική παράσταση, που μας υποδηλώνει ότι μέσω αυτού του menu μπορούμε να μορφοποιήσουμε την μπλε γραφική παράσταση, η οποία αντιστοιχεί στην πρώτη συνάρτηση που γράψαμε μέσα στο `plot` (πρώτο menu Function2d↔γραφική παράσταση πρώτης συνάρτησης). Αυτή η πληροφορία φαίνεται και στο menu Definition, όπου δίπλα στην επιλογή Function εμφανίζεται ο ορισμός της συνάρτησης, που σε αυτήν την περίπτωση είναι $\sin(x)$. Επιλέγοντας, άλλα μενού από τον χώρο κάτω δεξιά μπορούμε να μορφοποιήσουμε όπως θέλουμε την μπλε γραφική παράσταση. Για παράδειγμα, επιλέγοντας τη λειτουργία LineColor από το μενού Style, μπορούμε να αλλάξουμε το χρώμα της γραφικής παράστασης. Επιλέγοντας τη λειτουργία LineWidth επίσης από το μενού Style, μπορούμε να αλλάξουμε το πάχος γραμμής της γραφικής παράστασης, ενώ επιλέγοντας τη λειτουργία LineStye από το ίδιο μενού Style, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διακεκομμένη γραμμή ή κουκκίδες. Αν πάλι επιλέξουμε το δεύτερο κατά σειρά menu Function2d, «μαρκάρεται» η κόκκινη γραφική παράσταση, που μας υποδηλώνει ότι μέσω αυτού του

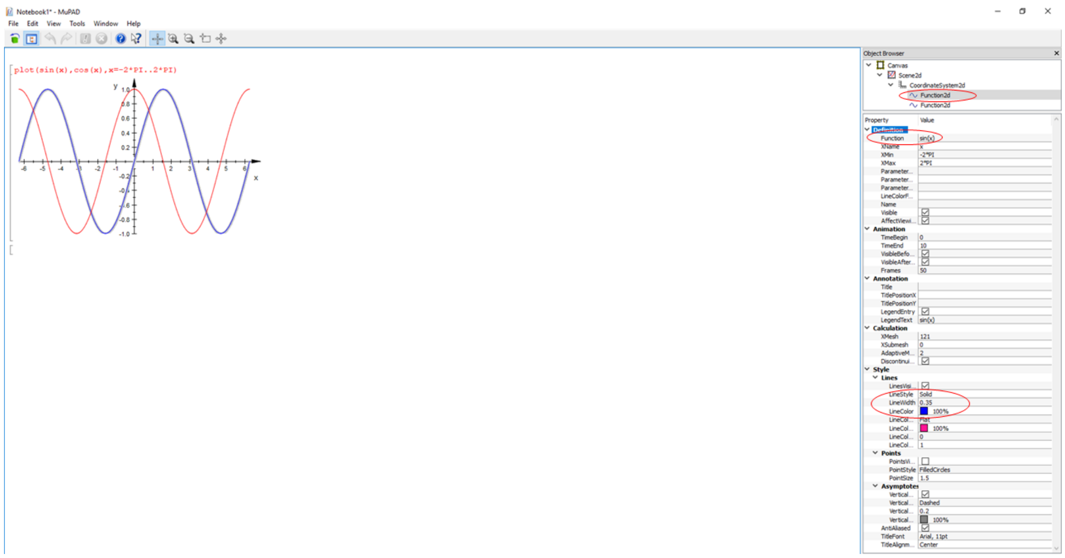


Σχήμα 3.7: Το menu CoordinateSystem2d του Object Browser.

menu μπορούμε να μορφοποιήσουμε την κόκκινη γραφική παράσταση, η οποία αντιστοιχεί στη δεύτερη συνάρτηση που γράψαμε μέσα στο plot, δηλαδή στην $\cos(x)$.

Ίσως μια από τις πιο χρήσιμες επιλογές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, ειδικά όταν στο ίδιο σχήμα σχεδιάζουμε περισσότερες από μία γραφικές παραστάσεις, είναι μια χρωματική ένδειξη αναφορικά με το ποιο χρώμα αντιστοιχεί σε κάθε γραφική παράσταση. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε, επιλέγοντας από το menu Scene2d, το menu Annotation και κλικάροντας το λευκό κουτάκι δίπλα στη λειτουργία LegendVisible. Τότε εμφανίζεται στο κάτω μέρος της γραφικής παράστασης, η ένδειξη που σημειώνεται με πράσινο βέλος στο σχήμα 3.9. Το κάτω μέρος στο οποίο εμφανίζεται αυτή η ένδειξη, είναι η προκαθορισμένη θέση. Εντούτοις, αυτή η θέση μπορεί να αλλάξει μέσω των λειτουργιών LegendPlacement και LegendAlignment.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η μορφοποίηση μιας γραφικής παράστασης μέσω του Object Browser, χάνεται αν ξανατρέξουμε τη σχετική εντολή `plot` και θα πρέπει να τη μορφοποιήσουμε εκ νέου. Ο μόνος τρόπος για να μη συμβαίνει αυτό, είναι να ενσωματωθεί αυτή η μορφοποίηση εντός της εντολής `plot`. Για παράδειγμα,



Σχήμα 3.8: Το menu Function2d του Object Browser.

Σχήμα 3.9: Το Scene2d του Object Browser.

γράφοντας

[plot(sin(x),cos(x),x=-2*PI..2*PI, LegendVisible = TRUE)

εμφανίζεται η γραφική παράσταση του σχήματος 3.9 με τη χρωματική ένδειξη στο κάτω μέρος. Ο αναγνώστης καλείται να εξερευνήσει μόνος του, όλες τις επιλογές που μας προσφέρονται μέσω του Object Browser, καθώς και μέσω του Help, να βρει πως θα ενσωματώσει στην εντολή `plot` ότι μορφοποιήσεις χρειάζεται.

Η έξοδος από το περιβάλλον του Object Browser γίνεται κάνοντας αριστερό κλικ οπουδήποτε στο λευκό χώρο αριστερά του Object Browser.

Ας υποθέσουμε ότι είναι γνωστή μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $fk(x)$, όπου k παράμετρος. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα μέλη αυτής της οικογένειας για διαδοχικές τιμές της παραμέτρου k, η εντολή `plot` τροποποιείται ως εξής:

plot

`plot`($fk(x)$ \$ k =αρχική τιμή..τελική τιμή)

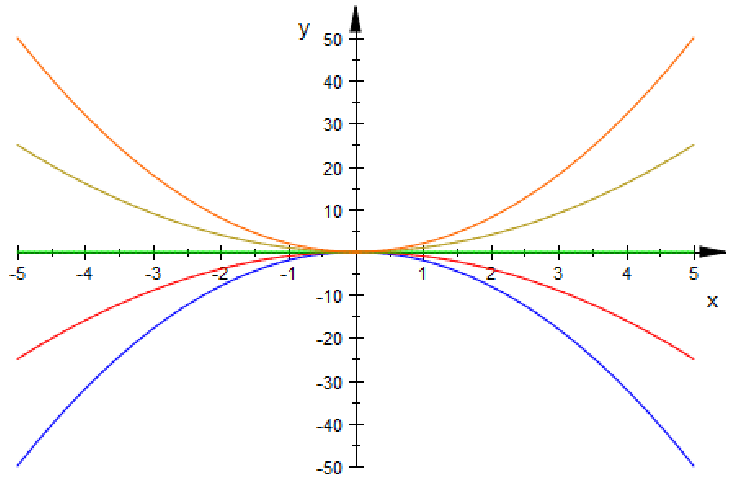
Φυσικά μπορούμε και να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Π.χ., για να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων kx^2 για $k = -2, -1, 0, 1, 2$ χωρίς προσδιορισμό του πεδίου ορισμού της μεταβλητής x γράφουμε

[plot($k * x$^2 \$ $k = -2..2$)

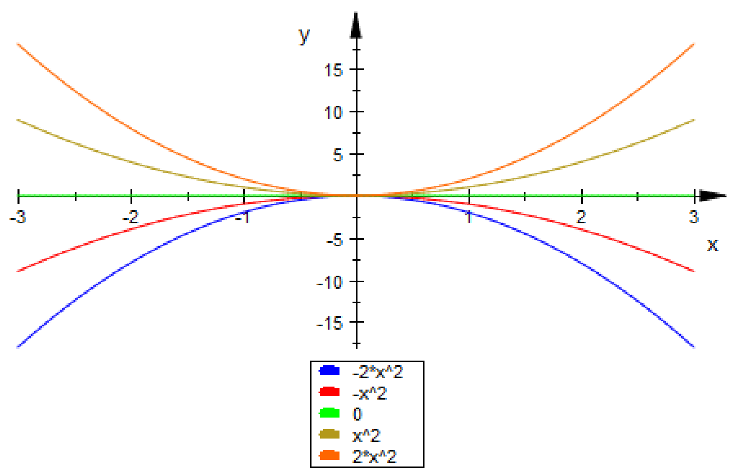
και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.10. Αντίστοιχα, για να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων kx^2 για $k = -2, -1, 0, 1, 2$ και $x \in [-3, 3]$ γράφουμε

[plot($k * x$^2 \$ $k = -2..2$, $x = -3..3$)

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.11, όπου έχει ενσωματωθεί και χρωματική ένδειξη αναφορικά με το ποιο χρώμα αντιστοιχεί σε κάθε γραφική παράσταση.



Σχήμα 3.10: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων kx^2 για $k = -2, -1, 0, 1, 2$.



Σχήμα 3.11: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων kx^2 για $k = -2, -1, 0, 1, 2$ και $x \in [-3, 3]$.

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, χρησιμοποιούμε και πάλι την εντολή **plot**, αλλά δηλώνοντας κατάλληλα ότι θα σχεδιάσουμε τρισδιάστατη γραφική παράσταση (#3D). Αυτό γίνεται ως εξής:

plot

plot(Συνάρτηση,#3D)

Ότι αναφέραμε ήδη για δισδιάστατες γραφικές παραστάσεις, ισχύει και για τρισδιάστατες γραφικές παραστάσεις. Π.χ., αν επιθυμούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης για συγκεκριμένο διάστημα ορισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών, η εντολή **plot** τροποποιείται ως εξής:

plot

plot(Συνάρτηση, Πρώτη Μεταβλητή=Αρχική Τιμή..Τελική Τιμή, Δεύτερη Μεταβλητή=Αρχική Τιμή..Τελική Τιμή,#3D)

Αν επιθυμούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων στο ίδιο σχήμα, η εντολή **plot** τροποποιείται ως εξής:

plot

plot(1η συνάρτηση, 2η συνάρτηση, Πρώτη Μεταβλητή=Αρχική Τιμή..Τελική Τιμή, Δεύτερη Μεταβλητή=Αρχική Τιμή..Τελική Τιμή,#3D)

Π.χ. γράφοντας

[plot(x^4 + $x * y + x$^2 $* y$^3, #3D)

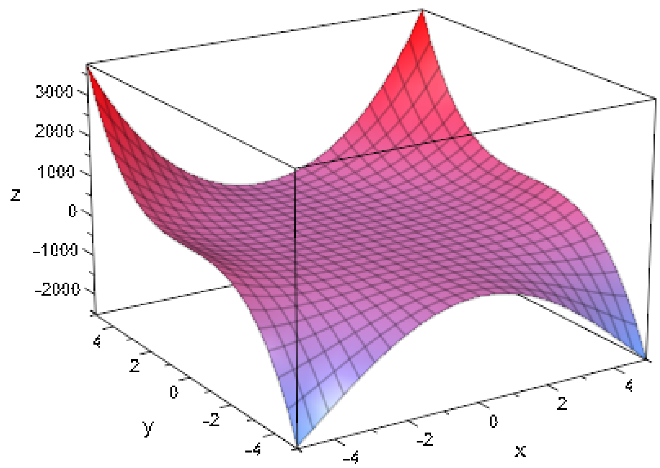
λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.12.

Γράφοντας

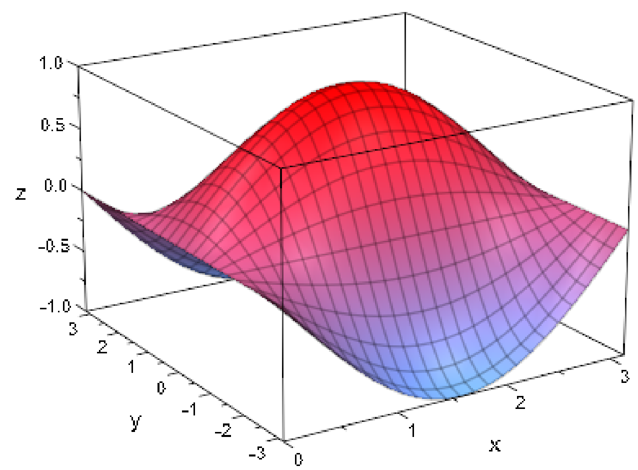
[plot(sin(x)*cos(y),x=0..PI,y=-PI..PI, #3D)

λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.13.

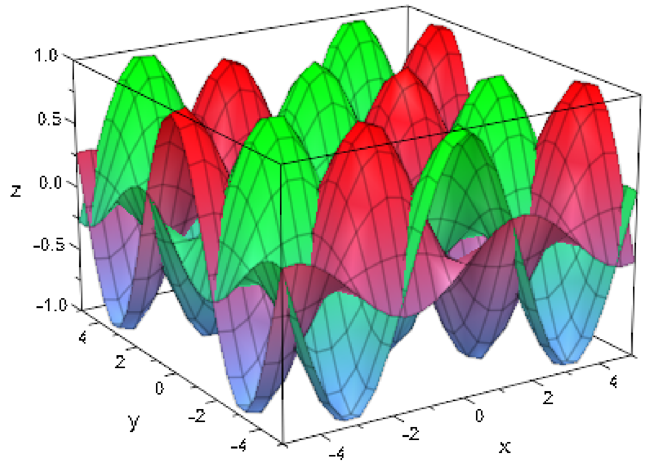
Τέλος, γράφοντας



Σχήμα 3.12: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^4 + xy + x^2y^3$.



Σχήμα 3.13: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sin x \cos y$ για $x \in [0, \pi]$, $y \in [-\pi, \pi]$.



Σχήμα 3.14: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $\sin x \cos y$ και $\sin y \cos x$.

[plot(sin(x)*cos(y),sin(y)*cos(x),x=0..PI,y=-PI..PI, #3D)

λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.14.

3.4.2 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που ο τύπος τους δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής $y = y(x)$, που ορίζεται μέσω μιας σχέσης της μορφής $f(x, y) = 0$, χρησιμοποιούμε την εντολή `plot::Implicit2d`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

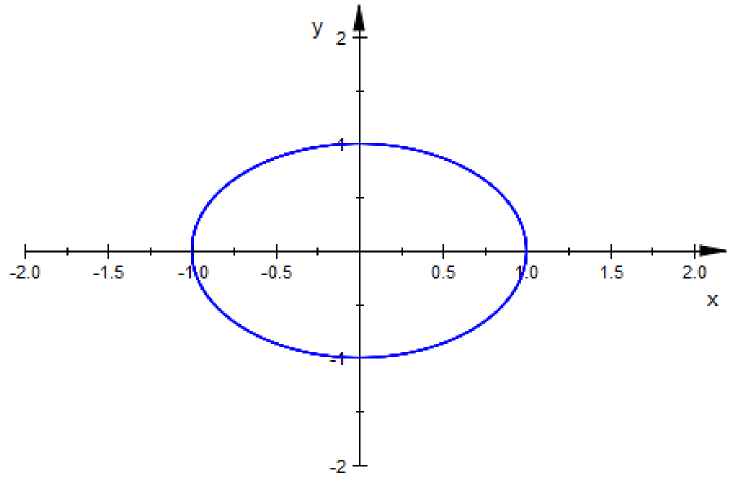
plot(plot::Implicit2d)

plot(plot::Implicit2d(f(x,y), x= αρχική τιμή .. τελική τιμή, y = αρχική τιμή .. τελική τιμή))

Π.χ., για να σχεδιάσουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, για $x, y \in [-2, 2]$ γράφουμε

[plot(plot::Implicit2d(x^2 + y^2 − 1,x=-2..2,y=-2..2))

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.15.



Σχήμα 3.15: Γραφική παράσταση του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Ακόμη, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα μέλη μιας οικογένειας συναρτήσεων που ορίζονται μέσω της σχέσης $g(x, y) = c$, για διαδοχικές τιμές της παραμέτρου c, η εντολή `plot::Implicit2d` τροποποιείται ως εξής:

plot(plot::Implicit2d)

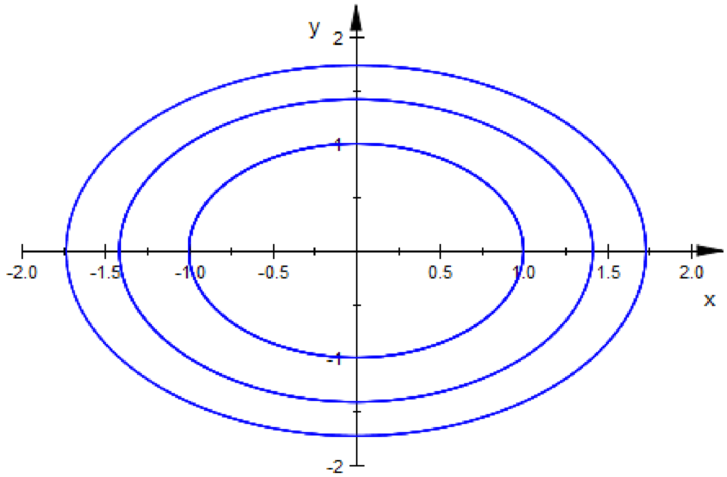
`plot(plot::Implicit2d(`g(x,y), x= αρχική τιμή .. τελική τιμή, y = αρχική τιμή .. τελική τιμή, `Contours`=[c $ c=αρχική τιμή .. τελική τιμή]))

Π.χ., για να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα τους κύκλους $x^2 + y^2 = c$, για $x, y \in [-2, 2]$ και $c = 1, 2, 3$ γράφουμε

```
[ plot(plot::Implicit2d(x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2,
Contours=[c $ c= 1..3]))
```

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.16.

Στην περίπτωση όπου οι τιμές της παραμέτρου c δεν είναι διαδοχικές, αλλά τυχαίες, η εντολή `plot::Implicit2d` τροποποιείται ως εξής:



Σχήμα 3.16: Γραφική παράσταση των κύκλων $x^2 + y^2 = c$, για $x, y \in [-2, 2]$ και $c = 1, 2, 3$.

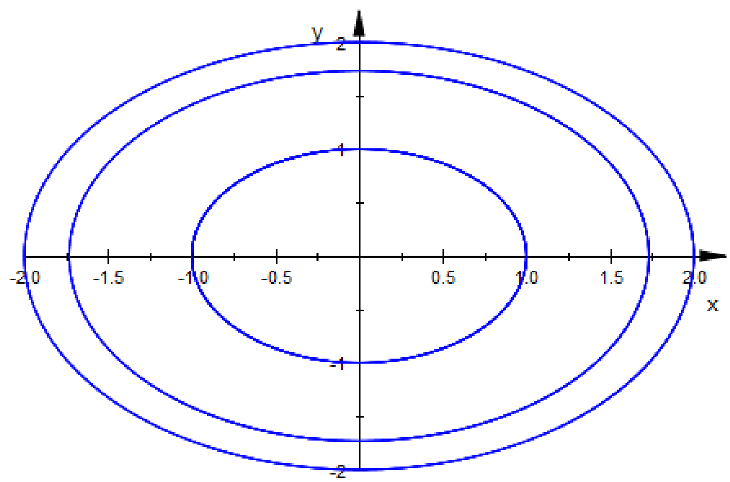
plot(plot::Implicit2d)

`plot(plot::Implicit2d`(g(x,y), x= αρχική τιμή .. τελική τιμή, y = αρχική τιμή .. τελική τιμή, `Contours`=[πρώτη τιμή του c, δεύτερη τιμή του c,..., τελική τιμή του c]))

Π.χ., για να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα τους κύκλους $x^2 + y^2 = c$, για $x, y \in [-2, 2]$ και $c = 1, 1/2, 4$ γράφουμε

```
[ plot(plot::Implicit2d(x^2 + y^2,x=-2..2,y=-2..2,
Contours=[1,1/2,4]))
```

και λαμβάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.17.



Σχήμα 3.17: Γραφική παράσταση των κύκλων $x^2 + y^2 = c$, για $x, y \in [-2, 2]$ και $c = 1, 1/2, 4$.

Κεφάλαιο 4

Επίλυση εξισώσεων και συστημάτων

4.1 Αλγεβρικές εξισώσεις και συστήματα

Για να επιλύσουμε μια αλγεβρική εξίσωση αναλυτικά χρησιμοποιούμε την εντολή **solve**, η οποία συντάσσεται ως εξής:

solve

solve(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή)

Π.χ. [solve$(x\^{}2+x-2=0,x)$

[$\{-2,1\}$

Π.χ. [solve$(x\^{}3-x\^{}2+x-1=0,x)$

[$\{1,i,-i\}$

Ουσιαστικά το αποτέλεσμα της εντολής solve δίνει μια λίστα με τις ρίζες της υπό επίλυση εξίσωσης. Είναι πρακτικό να δίνουμε κάποιο όνομα σ' αυτό το αποτέλεσμα, ώστε να μπορούμε να καλέσουμε όποια ρίζα της εξίσωσης θέλουμε, όπως αναφέρθηκε στην §2.4.

Π.χ. [s:=`solve`$(x\hat{}2+x-2=0,x)$

[$\{-2,1\}$

[s[1]

[-2

[s[2]

[1

Παρατηρήσεις

1. Η εντολή `solve` μπορεί να εκτελεστεί το ίδιο αποτελεσματικά και χωρίς να γράψουμε $=0$.[1]

   Π.χ. [`solve`$(x\hat{}2+x-2,x)$

   [$\{-2,1\}$

2. Η εντολή `solve` μπορεί να εκτελεστεί το ίδιο αποτελεσματικά και χωρίς να προσδιορίσουμε την άγνωστη μεταβλητή, όταν εμφανίζεται ΜΟΝΟ μία παράμετρος στην εξίσωση.

   Π.χ. [w:=`solve`$(x\hat{}2+x-2=0)$

   [$\{[x=1],[x=-2]\}$

   Παρατηρείστε το διαφορετικό τρόπο γραφής του αποτελέσματος w αναφορικά με το αποτέλεσμα s, σελ. 56. Το αποτέλεσμα w είναι ουσιαστικά μια λίστα, που αποτελείται από δύο λίστες, τις: $[x=1]$ και $[x=-2]$. Για να καλέσουμε τώρα κάθε ρίζα της εξίσωσης, θα πρέπει να καλέσουμε την πρώτη ή τη δεύτερη λίστα, να επιλέξουμε ότι υπάρχει στο εσωτερικό της και στη συνέχεια να επιλέξουμε ότι είναι γραμμένο μετά το $=$, δηλαδή

   [w[1][1][2]

[1] Αν δεν γράψουμε $=0$, θεωρείται αυτόματα ότι το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι 0.

[1

[w[2][1][2]

[-2

Με την πρώτη αγκύλη [1] ή [2] μετά το w γίνεται επιλογή της λίστας $[x = 1]$ ή $[x = -2]$, αντίστοιχα. Γράφοντας και τη δεύτερη αγκύλη, δηλ. [1], επιλέγεται η σχετική εξίσωση $x = 1$ ή $x = -2$ και τέλος γράφοντας και την τρίτη αγκύλη, δηλ. [2], επιλέγεται το δεύτερο μέλος της σχετικής εξίσωσης 1 ή -2.

3. Αν προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $bx + 3 = 0$, χωρίς να προσδιορίσουμε ποια είναι η άγνωστη μεταβλητή θα προκύψει:

   [$\texttt{solve}(b * x + 3 = 0)$

   [$\left(\begin{array}{c} b \\ x \end{array}\right) \in \left\{\left(\begin{array}{c} -\frac{3}{z} \\ z \end{array}\right) | z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\right\}$

   δηλαδή επειδή δεν προσδιορίσαμε την άγνωστη μεταβλητή, ο υπολογιστής θεωρεί ότι πρέπει να λύσει μια εξίσωση με δύο μεταβλητές, τις b και x.

4. Αν επιλύσουμε και πάλι την εξίσωση $bx + 3 = 0$, αλλά προσδιορίσουμε ότι η άγνωστη μεταβλητή είναι η x, προκύπτει

   [$\texttt{solve}(b * x + 3 = 0, x)$

   [$\begin{cases} \emptyset & \text{if} \quad b = 0 \\ \{-\frac{3}{b}\} & \text{if} \quad b \neq 0 \end{cases}$

   δηλαδή γίνεται διερεύνηση ως προς την παράμετρο b.

5. Το δεύτερο μέλος της προς επίλυση εξίσωσης δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσο με 0.

   Π.χ. [$\texttt{solve}(x\hat{\ }2 + x - 1 = 1, x)$

   [$\{-2, 1\}$

6. Πολλές φορές οι ρίζες της υπό επίλυση εξίσωσης δίνονται με συμβολικό τρόπο γραφής. Σε αυτή την περίπτωση συνδυάζουμε την εντολή `solve` με την εντολή `float`.

   Π.χ. [$\texttt{solve}(x\hat{}2 + 3 * x - 2 = 0, x)$

   [$\left\{-\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{3}{2}\right\}$

   Αλλά

   [$\texttt{float(solve}(x\hat{}2 + 3 * x - 2 = 0, x))$

   [$\{-3.561552813, 0.5615528128\}$

7. Η εντολή `solve` μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση μη πολυωνυμικών εξισώσεων.

   Π.χ. [$\texttt{solve}(\texttt{cos}(x) = 0, x)$

   [$\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\right\}$

   Παρατηρείστε ότι δίνεται ο αναλυτικός τύπος των ριζών της εξίσωσης $\cos(x) = 0$.

Η εντολή `solve` μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε να προσδιορίζεται το πεδίο τιμών της μεταβλητής της προς επίλυση εξίσωσης, ως εξής:

solve

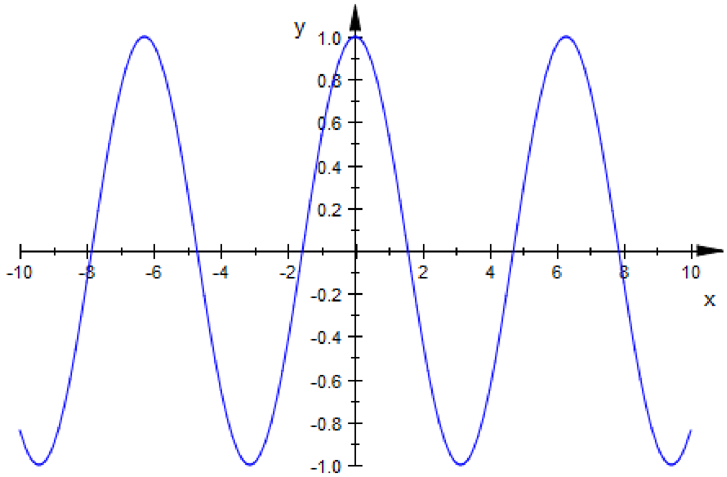
`solve`(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή=αρχική τιμή μεταβλητής..τελική τιμή μεταβλητής)

Π.χ. [$\texttt{solve}(\texttt{cos}(x) = 0, x = 0..1)$

[$\emptyset$

που σημαίνει ότι η εξίσωση $\cos(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο διάστημα $x \in [0, 1]$.

Π.χ. [$\text{k:=}\texttt{solve}(\texttt{cos}(x) = 0, x = -10..10)$



Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\cos x$ για $x \in [-10, 10]$.

[$\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}$

[`float`(k)

[-7.853981634, -4.71238898, -1.570796327, 1.570796327,

4.71238898, 7.853981634

Τα ανωτέρω αποτελέσματα επιβεβαιώνονται φυσικά και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\cos x$ (βλ. σχήμα 4.1).

Ακόμη, μπορούμε να δηλώσουμε μια υπόθεση εργασίας για την άγνωστη μεταβλητή, πριν την επίλυση της εξίσωσης, ώστε να περιορίσουμε τις πιθανές ρίζες της εξίσωσης. Αυτό γίνεται με χρήση της εντολής **assume** που είδαμε στο κεφάλαιο 2, σελ. 21. Για παράδειγμα, αν θέλουμε μόνο τις θετικές ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 2 = 0$ γράφουμε

Π.χ. [`assume`$(x > 0)$

[`solve`$(x\hat{}2 + x - 2 = 0, x)$

και βρίσκουμε

[$\{1\}$

Ομοίως, αν θέλουμε μόνο τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ γράφουμε

Π.χ. [assume(x in R_)

[solve(x^3 $-$ x^2 $+ x - 1 = 0, x$)

και βρίσκουμε

[$\{1\}$

Με την εντολή **solve** μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά και συστήματα εξισώσεων, τροποποιώντας την ως εξής:

solve

solve({1η εξίσωση, 2η εξίσωση, ..., τελευταία εξίσωση}, {1η άγνωστη μεταβλητή, 2η άγνωστη μεταβλητή, ..., τελευταία άγνωστη μεταβλητή})

Π.χ. [solve($\{x + y - z = 10, x + y + z = -1, x - y - z = -1\}, \{x, y, z\}$)

[$\left\{\left[x = -1, y = \frac{11}{2}, z = -\frac{11}{2}\right]\right\}$

Η εντολή **solve** μπορεί να συνοδεύεται και από μία πολύ χρήσιμη επιλογή, την IgnoreSpecialCases. Σ' αυτήν την περίπτωση, η σύνταξη της εντολής **solve** τροποποιείται ως εξής:

solve-IgnoreSpecialCases

solve(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή,IgnoreSpecialCases)

Χρησιμοποιώντας αυτήν την επιλογή, δε γίνεται διερεύνηση των λύσεων της προς επίλυση εξίσωσης, αναφορικά με κάποιες ειδικές τιμές παραμέτρων που εμφανίζονται στην εξίσωση. Για παράδειγμα, επιλύσαμε στη σελ. 57, την εξίσωση

$bx+3=0$ ως προς x και στο αποτέλεσμα που λάβαμε έγινε διερεύνηση ως προς τις τιμές της παραμέτρου b. Αν εκτελέσουμε εκ νέου την εντολή `solve` για την ίδια εξίσωση, αλλά με χρήση και της επιλογής `IgnoreSpecialCases`

[`solve`$(b*x+3=0, x,$`IgnoreSpecialCases`$)$

λαμβάνουμε

[$\{-\frac{3}{b}\}$

Φυσικά υπάρχουν πολύ περισσότερες εξισώσεις που δεν επιδέχονται αναλυτική επίλυση. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$x = \cos x.$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την εντολή `solve` λαμβάνουμε

[`solve`(x=`cos`(x),x)

[solve(x-cos(x)=0,x)

που σημαίνει ότι η εντολή `solve` δεν μπορεί να μας δώσει αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει γιατί η εν λόγω εξίσωση δεν επιδέχεται αναλυτική λύση. Σε τέτοιες περιπτώσεις καταφεύγουμε σε αριθμητική επίλυση της εξίσωσης που επιτυγχάνεται με χρήση της εντολής `numeric::solve`

numeric::solve

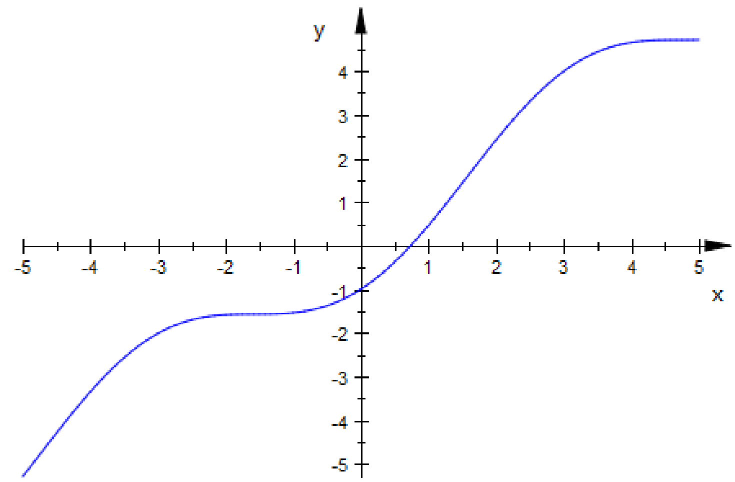
`numeric::solve`(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή)

Έτσι για την εξίσωση $x=\cos x$ έχουμε

[`numeric::solve`(x=`cos`(x),x)

[$\{0.7390851332\}$

Δηλαδή η ρίζα της εξίσωσης $x=\cos x$ είναι 0.7390851332, που συμφωνεί και με τη γραφική παράσταση του σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $x - \cos x$.

Ας επιλύσουμε τώρα μια άλλη εξίσωση, την

$$x^2 - \sin x - 3 = 0.$$

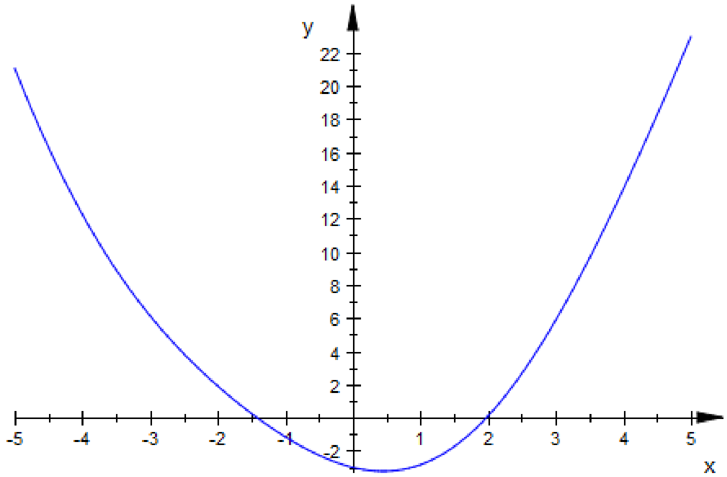
Γράφουμε

[numeric::solve(x∧2−sin(x)−3 = 0,x)

και λαμβάνουμε

[$\{-1.418310092\}$

Αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^2 - \sin x - 3$ (βλ. σχήμα 4.3), παρατηρούμε ότι τέμνει τον οριζόντιο άξονα δύο φορές, δηλαδή η εξίσωση $x^2 - \sin x - 3 = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Μπορούμε να εντοπίσουμε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης εστιάζοντας σε ένα διάστημα του x κοντά στη δεύτερη ρίζα. Αυτό γίνεται τροποποιώντας την εντολή `numeric::solve` έτσι ώστε να προσδιορίζεται το πεδίο τιμών της μεταβλητής της προς επίλυση εξίσωσης:



Σχήμα 4.3: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^2 - \sin x - 3$.

solve

`numeric::solve`(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή=αρχική τιμή μεταβλητής..τελική τιμή μεταβλητής)

Εφαρμόζοντας με αυτόν τον τρόπο την εντολή `numeric::solve` στην εξίσωση $x^2 - \sin x - 3 = 0$ βρίσκουμε

```
[ numeric::solve(x∧2−sin(x)−3,x=0..3)
```

```
[ {1.979320147}
```

Αν θέλουμε εξαρχής να βρούμε όλες τις πραγματικές ρίζες μιας εξίσωσης, προσθέτουμε την επιλογή `AllRealRoots`

numeric::solve

`numeric::solve`(Εξίσωση, Άγνωστη μεταβλητή,`AllRealRoots`)

Έτσι για την εξίσωση $x^2 - \sin x - 3 = 0$ βρίσκουμε

[`numeric::solve`$(x \wedge 2 - \sin(x) - 3 = 0$,x,`AllRealRoots`)

[$\{-1.418310092, 1.979320147\}$

4.2 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και συστήματα

Για να βρούμε αναλυτικά τη γενική λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ), χρησιμοποιούμε την εντολή `ode::solve`, η οποία συντάσσεται ως εξής:

ode::solve

`ode::solve`(ΣΔΕ, Άγνωστη συνάρτηση)

Π.χ. [`ode::solve`$(y'(t) - 2 * t * y(t) = 2 * t$,y(t))

[$\left\{C2e^{t^2} - 1\right\}$

Π.χ. [`ode::solve`$(y''(x) + y(x) =$`cos`(x),y(x))

[$\left\{\frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3\cos(x)}{8} + \sin(x)\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right) + C2\cos(x) + C3\sin(x)\right\}$

όπου $C2$, $C3$, αυθαίρετες σταθερές.[2]

Για να βρούμε αναλυτικά τη λύση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών (ΠΑΤ ή ΠΣΤ), δηλαδή τη λύση μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης που συνοδεύεται από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιούμε και πάλι την εντολή `ode::solve`, μόνο που τώρα εκτός από τη ΣΔΕ δηλώνονται και οι συνθήκες:

ode::solve

`ode::solve`({ΠΑΤ ή ΠΣΤ}, Άγνωστη συνάρτηση)

[2]Κάθε φορά που εκτελούμε μια εντολή `ode::solve`, αυξάνεται στις αυθαίρετες σταθερές, ο αριθμός μετά το C.

Τόσο οι ΣΔΕ, όσο και οι συνθήκες του ΠΑΤ ή του ΠΣΤ, που βρίσκονται μέσα στα {} χωρίζονται με κόμμα.

Π.χ. [`ode::solve`($\{y'(t) - 2 * t * y(t) = 2 * t,\ y(0) = 0\}$,y(t))

[$\left\{e^{t^2} - 1\right\}$

Π.χ. [`ode::solve`($\{y''(x) + y(x) =$`cos`(x),$y(0) = 1, y'(0) = 0\}$,y(x))

[$\left\{\frac{\cos(3x)}{8} + \frac{7\cos(x)}{8} + \sin(x)\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right)\right\}$

Π.χ. [`ode::solve`($\{y''(x) + y(x) =$`cos`(x),$y(0) = 1$,y(PI/2)=0},y(x))

[$\left\{\frac{\cos(3x)}{8} - \frac{\cos(x)}{8} + \sin(x)\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right) - \frac{\pi\sin(x)}{4}\right\}$

Όπως η εντολή `solve` έτσι και η εντολή `ode::solve` μπορεί να συνοδεύεται από την επιλογή `IgnoreSpecialCases`. Σ' αυτήν την περίπτωση, η σύνταξη της εντολής `ode::solve` τροποποιείται ως εξής:

ode::solve-IgnoreSpecialCases

`ode::solve`({ΠΑΤ ή ΠΣΤ}, Άγνωστη συνάρτηση, `IgnoreSpecialCases`)

Χρησιμοποιώντας αυτήν την επιλογή, δε γίνεται διερεύνηση των λύσεων της προς επίλυση εξίσωσης, αναφορικά με κάποιες ειδικές τιμές παραμέτρων που εμφανίζονται στην εξίσωση.

Π.χ. [`ode::solve`($w'(t) + k * w(t) = 3$, w(t))

[$\begin{cases} \{C3 + 3t\} & \text{if } k = 0 \\ \left\{\frac{C2e^{-kt}+3}{k}\right\} & \text{if } k \neq 0 \end{cases}$

Αλλά [`ode::solve`($w'(t) + k * w(t) = 3$, w(t),`IgnoreSpecialCases`)

[$\left\{\frac{C2e^{-kt}+3}{k}\right\}$

Με την εντολή `ode::solve` μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά και συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΣΔΕ). Για να βρούμε τη γενική λύση ενός ΣΣΔΕ χρησιμοποιούμε την εντολή `ode::solve` ως ακολούθως

ode::solve

`ode::solve`({1η ΣΔΕ, 2η ΣΔΕ, ..., τελευταία ΣΔΕ}, {1η άγνωστη συνάρτηση, 2η άγνωστη συνάρτηση, ..., τελευταία άγνωστη συνάρτηση})

ενώ για να βρούμε τη λύση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών για ένα ΣΣΔΕ χρησιμοποιούμε την εντολή `ode::solve` ως ακολούθως

ode::solve

`ode::solve`({1η ΣΔΕ, 2η ΣΔΕ, ..., τελευταία ΣΔΕ, 1η συνθήκη, 2η συνθήκη, ..., τελευταία συνθήκη}, {1η άγνωστη συνάρτηση, 2η άγνωστη συνάρτηση, ..., τελευταία άγνωστη συνάρτηση})

Π.χ. [`ode::solve`$(\{x'(t) = 4*x(t) + 2*y(t), y'(t) = 3*x(t) + 3*y(t)\},$

$\{x(t), y(t)\})$

[$\left\{\left[y(t) = C1e^{6t} - \frac{3C2e^{t}}{2}, x(t) = C2e^{2t} + C1e^{6t}\right]\right\}$

Π.χ. [`ode::solve`$(\{x'(t) = 4*x(t) + 2*y(t), y'(t) = 3*x(t) + 3*y(t)$

$x(0) = 1, y(0) = 0\}, \{x(t), y(t)\})$

[$\left\{\left[y(t) = \frac{3e^{6t}}{5} - \frac{3e^{t}}{2}, x(t) = \frac{3e^{6t}}{5} + \frac{2e^{t}}{5}\right]\right\}$

Κεφάλαιο 5

Πίνακες

5.1 Ορισμός και διαχείριση πινάκων

Για να ορίσουμε έναν πίνακα χρησιμοποιούμε την εντολή `matrix` που συντάσσεται ως εξής:

`matrix`-Ορισμός πίνακα

`matrix`([[Πρώτη Γραμμή Πίνακα],[Δεύτερη Γραμμή],...,[Τελευταία Γραμμή]])

Τα στοιχεία κάθε γραμμής του πίνακα χωρίζονται μεταξύ τους με κόμμα.

Π.χ. [A:=`matrix`([[4,-1],[0,2]])

$$\left[\;\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right.$$

Ειδικά για διαγώνιους πίνακες και μοναδιαίους πίνακες μπορούμε να χρησιμοποιούμε επιπλέον τις εντολές:

matrix-Ορισμός διαγώνιου πίνακα

`matrix`(Αριθμός Γραμμών, Αριθμός Στηλών, [Διαγώνια Στοιχεία], `Diagonal`)

Τα διαγώνια στοιχεία χωρίζονται μεταξύ τους με κόμμα.

matrix::identity-Ορισμός ταυτοτικού πίνακα

`matrix::identity`(Διάσταση Πίνακα)

Π.χ. για να ορίσουμε το διαγώνιο πίνακα $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, γράφουμε

[`matrix(5,5,[-1,4,2,-2,8],Diagonal)`

ενώ για να ορίσουμε τον 4×4 μοναδιαίο πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, γράφουμε

[`matrix::identity(4)`

Μια άλλη ειδική κατηγορία πίνακα είναι ο Ιακωβιανός πίνακας. Δοθέντων των n συναρτήσεων, n ανεξάρτητων μεταβλητών

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ο Ιακωβιανός τους πίνακας υπολογίζεται απευθείας με τη βοήθεια της εντολής `linalg::jacobian`[1]

[1]Η ένδειξη `linalg` υποδηλώνει ότι χρησιμοποιείται εντολή από τη βιβλιοθήκη `linalg` του `MuPAD` που περιέχει εντολές χρήσιμες για τη Γραμμική Άλγεβρα (Linear Algebra).

linalg::jacobian

linalg::jacobian$([f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$
$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)],[x_1, x_2, \ldots, x_n])$

Για παράδειγμα, ο Ιακωβιανός πίνακας των πολικών συντεταγμένων $r \cos w$ και $r \sin w$ προκύπτει ως εξής

[**linalg::jacobian** ([r*cos(w),r*sin(w)],[r,w])

[$\begin{pmatrix} \cos(w) & -r\sin(w) \\ \sin(w) & r\cos(w) \end{pmatrix}$

Έστω ότι έχει ορισθεί ένας n×m πίνακας M. Για να επιλέξουμε το στοιχείο του πίνακα M που βρίσκεται στη θέση (p,q), αρκεί να πληκτρολογήσουμε M[p,q]. Π.χ. αν θέλουμε να επιλέξουμε το στοιχείο που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή της δεύτερης στήλης του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ που ορίσθηκε στη σελ. 67 γράφουμε

[A[1,2]

[-1

και λαμβάνουμε

[-1

Δοθέντων δύο πινάκων M και K, μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο πίνακα X που αποτελείται από τους πίνακες M και K γραφόμενοι ο ένας δίπλα στον άλλο, με χρήση της εντολής M.K. Αν οι πίνακες M και K δεν είναι ίδιων διαστάσεων, στις κενές θέσεις τοποθετούνται μηδενικά.

Π.χ. για [A:=**matrix**([[4,-1],[0,2]])

[$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

[M:=matrix([[1,1],[0,2],[3,-1]])

$$\left[\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right.$$

και [K:=matrix([[2,3],[1,1]])

$$\left[\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

βρίσκουμε

[A.K

$$\left[\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

[A.M

$$\left[\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right.$$

Δοθέντος ενός πίνακα M, μπορούμε να εξάγουμε γραμμές ή στήλες του με χρήση των εντολών `linalg::row` και `linalg::col`, αντίστοιχα

linalg::row

`linalg::row`(M,αριθμός γραμμής)

linalg::col

`linalg::col`(M,αριθμός στήλης)

Π.χ. για τον πίνακα A που ορίσθηκε στη σελ. 67, λαμβάνουμε την πρώτη γραμμή του γράφοντας [linalg::row(A,1)

και τη δεύτερη στήλη του γράφοντας

[linalg::col(A,2)

Για να βρούμε τη διάσταση ενός πίνακα M που έχουμε ήδη ορίσει, χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::matdim`

linalg::matdim

```
linalg::matdim(M)
```

Π.χ. [linalg::matdim(A)

[[2,2]

για τον πίνακα A που ορίσθηκε στη σελ. 67.

5.2 Πράξεις πινάκων

Για τις πράξεις πινάκων χρησιμοποιούμε τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης (+), αφαίρεσης (−), πολλαπλασιασμού (∗) και εύρεσης δυνάμεων (^) αριθμών.

Π.χ. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

- Να δηλωθούν οι πίνακες A, B και C.
- Να βρεθεί η διάσταση του πίνακα B.
- Να γίνουν εφόσον είναι εφικτό οι πράξεις: $B + 5C$, BA A^2, BC.

Έχουμε

[A:=matrix([[4,-1],[0,2]])

[$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

[B:=`matrix`([[3,0],[-1,2],[1,1]])

[$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[C:=`matrix`([[5,2],[3,5],[6,7]])

[$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

[`linalg::matdim`(B)

[[3,2]

[B+5∗C

[$\begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 14 & 27 \\ 31 & 36 \end{pmatrix}$

[B∗A

[$\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

[A^2

[$\begin{pmatrix} 16 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

[B∗C

[Error: The dimensions do not match.

που μας τονίζει ότι δεν γίνεται ο πολλαπλασιασμός των πινάκων B και C γιατί δεν έχουν τις σωστές διαστάσεις.

Για την εύρεση του ανάστροφου ενός πίνακα M, χρησιμοποιούμε την εντολή `transpose`

transpose

`transpose`(M)

Π.χ. για τον ανάστροφο του πίνακα B που ορίσθηκε στη σελ. 72 είναι

[`transpose`(B)

[$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Για την εύρεση του αντίστροφου ενός πίνακα M, χρησιμοποιούμε την εντολή `inverse`

inverse

`inverse`(M)

Π.χ. για τον αντίστροφο του πίνακα A που ορίσθηκε στη σελ. 67 είναι

[`inverse`(A)

[$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

ενώ για τον αντίστροφο του πίνακα B που ορίσθηκε στη σελ. 72 είναι

[`inverse`(B)

[Error: A square matrix of category 'Cat::Matrix' is expected.

που μας τονίζει ότι δεν υπολογίζεται ο αντίστροφος του B δεδομένου ότι δεν είναι τετραγωνικός πίνακας.

5.3 Χαρακτηριστικά μεγέθη πινάκων

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός τετραγωνικού πίνακα είναι η ορίζουσά του, το ίχνος του, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του. Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα M, χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::det`

linalg::det

```
linalg::det(M)
```

ενώ για να υπολογίσουμε το ίχνος του χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::tr`

linalg::tr

```
linalg::tr(M)
```

Π.χ. για τους πίνακες A και B που ορίσθηκαν στις σελ. 67 και 72, αντίστοιχα είναι

```
[linalg::det(A)
[ 8
[linalg::tr(A)
[ 6
[linalg::det(B)
[ Error: A square matrix is expected.
[linalg::tr(B)
[ Error: A square matrix is expected.
```

Τα αποτελέσματα των δύο τελευταίων εντολών μας τονίζουν ότι δεν υπολογίζεται ούτε η ορίζουσα, ούτε το ίχνος του B δεδομένου ότι δεν είναι τετραγωνικός πίνακας.

Συνδυάζοντας τις εντολές `linalg::det` και `linalg::jacobian` λαμβάνουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα n συναρτήσεων, n ανεξάρτητων μεταβλητών

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Για παράδειγμα, η Ιακωβιανή ορίζουσα των πολικών συντεταγμένων $r \cos w$ και $r \sin w$ προκύπτει ως εξής

[linalg::det(linalg::jacobian([r*cos(w),r*sin(w)],[r,w]))

[$r\cos(w)^2 + r\sin(w)^2$

ή με χρήση και της εντολής `simplify`

[simplify(linalg::det(linalg::jacobian([r*cos(w),r*sin(w)],

[r.w])))

[r

Μια άλλη ορίζουσα ειδικού ενδιαφέροντος για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, είναι η ορίζουσα Wronksi, που υπολογίζεται με χρήση της εντολής `ode::wronskian`

ode::wronskian

`ode::wronskian`(Λίστα συναρτήσεων, μεταβλητή ως προς την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις)

Για παράδειγμα η ορίζουσα Wronksi των συναρτήσεων e^t και t^2 υπολογίζεται ως εξής:

[ode::wronskian([exp(t),t^2],t)

[$2te^t - t^2e^t$

Αν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε μόνο τις ιδιοτιμές ενός πίνακα M, χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::eigenvalues`

linalg::eigenvalues

`linalg::eigenvalues(M)`

Αν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τα απλά ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα M, χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::eigenvectors`

linalg::eigenvectors

`linalg::eigenvectors(M)`

Για κάθε απλό ιδιοδιάνυσμα, το αποτέλεσμα της προηγούμενης εντολής, μας πληροφορεί σε ποια ιδιοτιμή του πίνακα M αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα, καθώς και ποια είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Π.χ. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Να δηλωθούν οι πίνακες A, H και G.
- Να βρεθούν μόνο οι ιδιοτιμές των πινάκων A, H και G.
- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα απλά ιδιοδιανύσματα των πινάκων A, H και G.

Έχουμε

```
[A:=matrix([[4,-1],[0,2]])
```

[$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

```
[H:=matrix([[3,-1,-1],[1,1,-1],[1,-1,1]])
```

[$H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

[G:=`matrix`([[2,-1,0],[1,0,0],[0,0,3]])

[$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[`linalg::eigenvalues`(A)

[$\{2, 4\}$

[`linalg::eigenvalues`(H)

[$\{1, 2\}$

[`linalg::eigenvalues`(G)

[$\{1, 3\}$

[`linalg::eigenvectors`(A)

[$\left[\left[2, 1, \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[4, 1, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$

που σημαίνει ότι η ιδιοτιμή 2 του πίνακα A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, ενώ η ιδιοτιμή 4 του πίνακα A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[`linalg::eigenvectors`(H)

[$\left[\left[1, 1, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[2, 2, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$

που σημαίνει ότι η ιδιοτιμή 1 του πίνακα A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ενώ η ιδιοτιμή 2 του πίνακα A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και αντίστοιχα απλά ιδιοδιανύσματα τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Κατά συνέπεια και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 2 είναι 2.

[`linalg::eigenvectors`(G)

$$\left[\left[\left[3, 1, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[1, 2, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right]\right]$$

που σημαίνει ότι η ιδιοτιμή 3 του πίνακα G έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ενώ η ιδιοτιμή 1 του πίνακα A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και μόνο ένα απλό ιδιοδιάνυσμα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Κατά συνέπεια η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1 είναι 1.

Κεφάλαιο 6

Διανύσματα και διανυσματικοί τελεστές

6.1 Διανύσματα

Ένα διάνυσμα (x, y, z) μπορεί να θεωρηθεί ως ένας πίνακας στήλη. Επομένως, μπορούμε να δηλώσουμε διανύσματα με τη βοήθεια της εντολής `matrix`, με την οποία είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι ορίζουμε πίνακες, ως εξής:

matrix-Ορισμός διανύσματος

```
matrix([x,y,z])
```

Συνδυάζοντας την ανωτέρω εντολή με τον ορισμό συναρτήσεων μπορούμε να ορίσουμε διανυσματικές συναρτήσεις.

Το μέτρο ενός διανύσματος u υπολογίζεται με την εντολή `norm`

norm

```
norm(u,2)
```

Η κανονικοποίηση ενός διανύσματος u γίνεται χρησιμοποιώντας την εντολή `linalg::normalize`

linalg::normalize

```
linalg::normalize(u)
```

Π.χ. [u:=matrix([u1,u2,u3])

$$\left[\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} \right.$$

[norm(u,2)

$$\left[\sqrt{|u1|^2 + |u2|^2 + |u3|^2} \right.$$

[linalg::normalize(u)

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{u1}{\sqrt{|u1|^2+|u2|^2+|u3|^2}} \\ \frac{u2}{\sqrt{|u1|^2+|u2|^2+|u3|^2}} \\ \frac{u3}{\sqrt{|u1|^2+|u2|^2+|u3|^2}} \end{pmatrix} \right.$$

Παρατηρείστε ότι τα $|\cdot|$ δηλώνουν μέτρα μιγαδικών αριθμών.

Για να ορίσουμε τη διανυσματική συνάρτηση $r(t) = (t, t+1)$ γράφουμε:

[r:=t−− >matrix([t,t+1])

και λαμβάνουμε

$$\left[\text{t} \to \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \right.$$

Προκειμένου να προσθέσουμε διανύσματα ή να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν αριθμό, χρησιμοποιούμε τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού $*$ αριθμών. Επίσης όλες οι πράξεις διανυσματικών συναρτήσεων, γίνονται κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο γίνονται και οι πράξεις μεταξύ των βαθμωτών συναρτήσεων.

Για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων u και v χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::scalarProduct`

linalg::scalarProduct

`linalg::scalarProduct(u, v, Real)`

Με την επιλογή `Real` υποχρεώνουμε τον υπολογιστή να θεωρήσει πραγματικές συνιστώσες για τα διανύσματα u,v. Η επιλογή αυτή παραλείπεται αν τα διανύσματα u,v έχουν συνιστώσες συγκεκριμένους αριθμούς.

Π.χ. [u:=matrix([u1,u2,u3])

[$\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix}$

[v:=matrix([v1,v2,v3])

[$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$

[linalg::scalarProduct(u, v)

[$u1\overline{v1} + u2\overline{v2} + u3\overline{v3}$

[linalg::scalarProduct(u, v, Real)

[$u1v1 + u2v2 + u3v3$

Για να υπολογίσουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων u και v χρησιμοποιούμε την εντολή `linalg::crossProduct`

linalg::crossProduct

`linalg::crossProduct(u, v)`

Π.χ. [u:=matrix([u1,u2,u3])

[$\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix}$

[v:=matrix([v1,v2,v3])

[$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$

[linalg::crossProduct(u, v)

[$\begin{pmatrix} u2v3 - u3v2 \\ u3v1 - u1v3 \\ u1v2 - u2v1 \end{pmatrix}$

Π.χ. Να ορισθούν τα διανύσματα $w1 = (3, 2, -1)$, $w2 = (4, 5, 1)$ και στη συνέχεια να υπολογισθούν

- το άθροισμά τους,
- το τριπλάσιο του $w1$,
- το μέτρο του $w2$,
- το αντίστοιχο του $w2$ κανονικοποιήμενο διάνυσμα,
- το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενό τους.

Έχουμε

[w1:=matrix([3,2,-1])

[$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

[w2:=matrix([4,5,1])

[$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

[w1+w2

[$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

[3* w1

[$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

[`norm`(w2,2)

[$\sqrt{42}$

[`linalg::normalize`(w2)

[$\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{42}}{21} \\ \frac{5\sqrt{42}}{42} \\ \frac{\sqrt{42}}{42} \end{pmatrix}$

[`linalg::scalarProduct`(w1, w2)

[21

[`linalg::crossProduct`(w1, w2)

[$\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

6.2 Διανυσματικοί τελεστές

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως βάθμωση (gradient) της $f(x,y,z)$ την ποσότητα

$$\mathrm{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Ο υπολογισμός της βάθμωσης μιας συνάρτησης γίνεται με χρήση της εντολής `linalg::grad` όπου οι προκαθορισμένες χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες είναι οι καρτεσιανές.

`linalg::grad`-Καρτεσιανές συντεταγμένες

`linalg::grad`(Συνάρτηση,[x,y,z])

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε τη βάθμωση μιας συνάρτησης σε κυλινδρικές (Cylindrical) ή σφαιρικές (Spherical) συντεταγμένες, τροποποιούμε την ανωτέρω εντολή ως εξής:

`linalg::grad`-Κυλινδρικές Συντεταγμένες

`linalg::grad`(Συνάρτηση,[r,φ,z],Cylindrical)

`linalg::grad`-Σφαιρικές Συντεταγμένες

`linalg::grad`(Συνάρτηση,[r,φ,ϑ],Spherical)

Π.χ. [$f := (x, y, z)- > x\hat{~}2 + y\hat{~}2 - 2 * z\hat{~}2 + z*$ln(x)

[$(x, y, z) \to x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln(x)$

[`linalg::grad`(f(x,y,z),[x,y,z])

[$\begin{pmatrix} 2x + \frac{z}{x} \\ 2y \\ \ln(x) - 4z \end{pmatrix}$

Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))\,.$$

Ορίζουμε ως απόκλιση (divergence) της $\vec{F}(x,y,z)$ την ποσότητα

$$\mathrm{div}(F) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

και ως στροβιλισμό της $\vec{F}(x,y,z)$ την ποσότητα

$$\mathrm{curl}(F) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Ο υπολογισμός της απόκλισης μιας συνάρτησης γίνεται με χρήση της εντολής `linalg::divergence` όπου οι προκαθορισμένες χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες είναι οι καρτεσιανές.

`linalg::divergence`-Καρτεσιανές συντεταγμένες

`linalg::divergence`(Συνάρτηση,[x,y,z])

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση μιας συνάρτησης σε κυλινδρικές (Cylindrical) ή σφαιρικές (Spherical) συντεταγμένες, τροποποιούμε την ανωτέρω εντολή όπως και πριν ως εξής:

`linalg::divergence`-Κυλινδρικές Συντεταγμένες

`linalg::divergence`(Συνάρτηση,[r,φ,z],Cylindrical)

`linalg::divergence`-Σφαιρικές Συντεταγμένες

`linalg::divergence`(Συνάρτηση,[r,φ,ϑ],Spherical)

Ανάλογα, ο υπολογισμός του στροβιλισμού μιας συνάρτησης γίνεται με χρήση της εντολής `linalg::curl` όπου οι προκαθορισμένες χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες είναι οι καρτεσιανές.

`linalg::curl`-Καρτεσιανές συντεταγμένες

`linalg::curl`(Συνάρτηση,[x,y,z])

Αν επιθυμούμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό μιας συνάρτησης σε κυλινδρικές (Cylindrical) ή σφαιρικές (Spherical) συντεταγμένες, τροποποιούμε την ανωτέρω εντολή όπως και πριν ως εξής:

`linalg::curl`-Κυλινδρικές Συντεταγμένες

`linalg::curl`(Συνάρτηση,[r,φ,z],Cylindrical)

`linalg::curl`-Σφαιρικές Συντεταγμένες

`linalg::curl`(Συνάρτηση,[r,φ,ϑ],Spherical)

Π.χ. [$h := (x, y, z)- >$`matrix`$([x\hat{\ }2 * z, -y * z, 3 * x * y])$

[$(x, y, z) \to$`matrix`$([x^2z, -yz, 3xy])$

[`linalg::divergence`(h(x,y,z),[x,y,z])

[$2xz - z$)

[`linalg::curl`(h(x,y,z),[x,y,z])

[$\begin{pmatrix} 3x + y \\ x^2 - 3y \\ 0 \end{pmatrix}$

Κεφάλαιο 7

Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

7.1 Μετασχηματισμός Laplace

Για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε την εντολή `laplace`

laplace

`laplace`(Συνάρτηση, ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, μεταβλητή του μετασχηματισμού)

ενώ για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε την εντολή `ilaplace`

ilaplace

`ilaplace`(Μετασχηματισμός Laplace, μεταβλητή του μετασχηματισμού, ανεξάρτητη μεταβλητή της αρχικής συνάρτησης)

Έτσι αν γράφουμε

[laplace(f(t),t,s)

λαμβάνουμε

[laplace(f(t),t,s)

Με αυτόν τον τρόπο συμβολίζεται στο MuPAD ο μετασχηματισμός Laplace μιας τυχαίας συνάρτησης. Επειδή έχουμε συνηθίσει το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ να τον συμβολίζουμε με $F(s)$, μπορούμε να συνδυάσουμε την εντολή `laplace` με την εντολή `subs` ως εξής

[subs(laplace(f(t),t,s),laplace(f(t),t,s)=F(s))

οπότε βλέπουμε στη οθόνη απλώς

[F(s)

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικά παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Laplace και αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace

[laplace(exp(b*t), t, s)

[$-\frac{1}{b-s}$

[ilaplace(1/(s-b), s, t)

[$e * bt$

[laplace(heaviside(t-2), t, s)

[$\frac{e^{-2s}}{s}$

[ilaplace(1/(s^2-2*s+10), s, t)

[$\frac{\sin(3t)e^{t}}{3}$

Επίσης υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο μετασχηματισμοί Laplace και αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace συναρτήσεων με περισσότερες από μία μεταβλητές, αρκεί φυσικά να δηλωθεί η μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός.
Π.χ. Να βρεθούν

- ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης e^{x+2t} ως προς t,
- ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης e^{x+2t} ως προς x,
- οι αντίστοιχοι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace

Έχουμε

```
[laplace(exp(x+2*t), t, s)
```

$[\frac{e^x}{s-2}$

```
[laplace(exp(x+2*t), x, s)
```

$[\frac{e^{2t}}{s-1}$

```
[ilaplace(exp(x)/(s-2), s, t)
```

$[e^{2t}e^x$

```
[ilaplace(exp(2*t)/(s-1), s, x)
```

$[e^{2t}e^x$

Ακόμη, το MuPAD είναι εφοδιασμένο με τη γνώση πολλών βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace, όχι όμως όλων. Για παράδειγμα, γνωρίζει τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace

```
[laplace(c1*f1(t)+c2*f2(t),t,s)
```

[c1 laplace(f1(t),t,s)+c2 laplace(f2(t),t,s)

καθώς και την ιδιότητα

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

όπου $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ και με $\mathcal{L}$ συμβολίζεται ο μετασχηματισμός Laplace

Π.χ. `[subs(laplace(diff(f(t),t $ 3) ,t,s),laplace(f(t),t,s)=F(s))`

$[s^3F(s) - sf'(0) - s^2f(0) - f''(0)$

Εντούτοις, δε γνωρίζει την ιδιότητα

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \mid t\right] = \frac{\partial U(x,s)}{\partial x},$$

όπου με $\mathcal{L}[\cdot|t]$ συμβολίζεται ο μετασχηματισμός Laplace ως προς t και $U(x,s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $u(x,t)$ ως προς t

[laplace(diff(u(x,t),x),t,s)

[laplace$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, t, s\right)$

δηλαδή δεν γίνεται κανένας υπολογισμός.

7.2 Μετασχηματισμός Fourier

Αναφορικά με τις γνώσεις του `MuPAD` για τον μετασχηματισμό Fourier ισχύει σχεδόν ότι και ισχύει και για τον μετασχηματισμό Laplace. Έτσι, για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε την εντολή `fourier`

fourier

`fourier`(Συνάρτηση, ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, μεταβλητή του μετασχηματισμού)

ενώ για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε την εντολή `ifourier`

ifourier

`ifourier`(Μετασχηματισμός Fourier, μεταβλητή του μετασχηματισμού, ανεξάρτητη μεταβλητή της αρχικής συνάρτησης)

Έτσι αν γράψουμε

[fourier(f(x),x,w)

λαμβάνουμε

[fourier(f(x),x,w)

Με αυτόν τον τρόπο συμβολίζεται στο MuPAD ο μετασχηματισμός Fourier μιας τυχαίας συνάρτησης. Επειδή έχουμε συνηθίσει και το μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ να τον συμβολίζουμε με $F(w)$, μπορούμε να συνδυάσουμε την εντολή fourier με την εντολή subs ως εξής

[subs(fourier(f(x),x,w),fourier(f(x),x,w)=F(w))

οπότε βλέπουμε στη οθόνη απλώς

[F(w)

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικά παραδείγματα υπολογισμού μετασχηματισμών Fourier και αντίστροφων μετασχηματισμών Fourier

[fourier(dirac(x), x, w)

[1

[ifourier(1, w, x)

[$\delta(x)$

[assume(b>0);fourier(exp(-b*abs(x)), x, w)

[$\frac{2b}{b^2+w^2}$

Επίσης υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο μετασχηματισμοί Fourier και αντίστροφοι μετασχηματισμοί Fourier συναρτήσεων με περισσότερες από μία μεταβλητές, αρκεί φυσικά να δηλωθεί η μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός. Επιπλέον, το MuPAD είναι εφοδιασμένο με τη γνώση πολλών βασικών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier, όχι όμως όλων. Για παράδειγμα, γνωρίζει τη γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier

[fourier(c1*f1(x)+c2*f2(x),x,w)

[c1 fourier(f1(x),x,w)+c2 fourier(f2(x),x,w)

την ιδιότητα

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iaw}F(w),$$

όπου $\mathcal{F}[f(x)] = F(w)$ και με $\mathcal{F}$ συμβολίζεται ο μετασχηματισμός Fourier

[`fourier`(f(x-b),x,w)

[e^{-bwi}fourier(f(x),x,w)

καθώς και την ιδιότητα

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (i\omega)^n F(\omega),$$

Π.χ. [`subs`(`fourier`(`diff`(f(x),x $ 2) ,x,w),`Fourier`(f(x),x,w)=F(w))

[$-w^2F(w)$

Εντούτοις, δε γνωρίζει την ιδιότητα

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \mid x\right] = \frac{\partial U(t,w)}{\partial t},$$

όπου με $\mathcal{F}[\cdot|x]$ συμβολίζεται ο μετασχηματισμός Fourier ως προς x και $U(t,w)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $u(x,t)$ ως προς x

[`fourier`(`diff`(u(x,t),t),x,w)

[fourier$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, x, w\right)$

δηλαδή δεν γίνεται κανένας υπολογισμός.

Βιβλιογραφία

[1] K. Gehrs & F. Postel, MuPAD–A practical guide, SciFace Software GmbH & Co. KG, 2003.

[2] M. Majewski, Getting started with MuPAD, Springer, 2005.

[3] D. McMahon, Matlab demystified, McGraw-Hill Education, 2007.

[4] Symbolic Math Toolbox™ MuPAD® Tutorial, SciFace Software GmbH & Co. KG, 1997–2008.

Ευρετήριο