Ε. Ν. Πετροπούλου, Μελέτη εξισώσεων διαφορών σε χώρους Hilbert και Banach και εφαρμογές αυτών, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα, 2002.(200 σελίδες)

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι η μελέτη των λύσεων:
α) μη γραμμικών συνήθων εξισώσεων διαφορών στο χώρο Banach

$$\ell^1_{\mathbb{N}} = \{f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C} / \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty\},$$

β) γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων διαφορών δύο μεταβλητών στο χώρο Hilbert

$$\ell^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{u(i,j) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |u(i,j)|^2 < +\infty\}$$

και στο χώρο Banach

$$\ell^1_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{u(i,j) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |u(i,j)| < +\infty\},$$

αντίστοιχα,
γ) γραμμικών και μη γραμμικών εξισώσεων διαφορών τριών μεταβλητών στο χώρο Hilbert

$$\ell^2_{\mathbb{N}^3} = \{u(i,j,k) : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |u(i,j,k)|^2 < +\infty\}$$

και στο χώρο Banach

$$\ell^1_{\mathbb{N}^3} = \{u(i,j,k) : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |u(i,j,k)| < +\infty\},$$

αντίστοιχα, και
δ) μη γραμμικών εξισώσεων διαφορών τεσσάρων μεταβλητών στο χώρο Banach

$$\ell^1_{\mathbb{N}^4} = \{u(i,j,k,l) : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{C} / \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |u(i,j,k,l)| < +\infty\}.$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι μια συναρτησιακή-αναλυτική μέθοδος, με τη βοήθεια της οποίας η εκάστοτε υπό μελέτη εξίσωση διαφορών (εν γένει p μεταβλητών) μετατρέπεται ισοδυνάμως σε μια τελεστική εξίσωση μέσω κάποιων αναπαραστάσεων-ισομορφισμών.

Για την κάτωθι γενική κλάση μη γραμμικών, μη ομογενών, συνήθων εξισώσεων διαφορών

$$f(n+m)+\sum_{p=1}^{m}(\alpha_p+\beta_p(n))f(n+m-p)=g(n)+\sum_{s=2}^{\infty}c_s(n)[f(n+q)]^s+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}d_{ik}(n)[f(n+q_{i1})f(n+q_{i2})]^k+$$
$$+\sum_{t=1}^{\Lambda}\sum_{k=1}^{\infty}b_{tk}(n)[f(n+q_{t3})f(n+q_{t4})f(n+q_{t5})]^k+$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{\infty}l_{jk}(n)[A_jf(n+q_{j6})+B_jf(n+q_{j7})]^kf(n+q_{j8}), \tag{1}$$

αποδεικνύεται, υπό κατάλληλες συνθήκες όσον αφορά στους συντελεστές, στον μη ομογενή όρο και στους μη γραμμικούς όρους αυτής ότι η γενική αυτή εξίσωση συνοδευόμενη από (εν γένει) μιγαδικές αρχικές συνθήκες, έχει μοναδική λύση στο χώρο Banach $\ell^1_{\mathbb{N}}$. Επιπλέον, δίνεται ένα φράγμα αυτής της λύσης, καθώς και μια περιοχή, εξαρτώμενη από τις αρχικές συνθήκες, το μη ομογενή όρο και τους συντελεστές της εξίσωσης, στην οποία ισχύει η προβλεπόμενη λύση. Αυτή η περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως μια περιοχή έλξης για το μηδενικό σημείο ισορροπίας της (1), διότι η προβλεπόμενη λύση, ως στοιχείο του $\ell^1_{\mathbb{N}}$, τείνει στο 0, καθώς το n τείνει στο άπειρο. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε πληροφορίες σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της (1). Επίσης, αν ϱ είναι ένα μη μηδενικό σημείο ισορροπίας της (1), μπορεί να αποδειχθεί, υπό κατάλληλες συνθήκες και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $f(n)=F(n)+\varrho$, ότι η (1) έχει μοναδική λύση στον χώρο $\ell^1_{\mathbb{N}}+\{\varrho\}$. Στη συνέχεια, μελετώνται συγκεκριμένες εξισώσεις διαφορών, που αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (1), αρκετές εκ των οποίων εμφανίζονται σε προβλήματα δυναμικής των πληθυσμών και έχουν μελετηθεί ξεχωριστά η κάθε μία από διάφορους ερευνητές. Επιπλέον μελετάται και μια εξίσωση διαφορών που δεν εμπίπτει στη γενική κατηγορία (1), προσαρμόζοντας κατάλληλα την τεχνική μας.

Για την κάτωθι γενική κλάση μη ομογενών γραμμικών εξισώσεων διαφορών δύο μεταβλητών

$$u(i,j+1)=p(i,j)+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(i,j)u(i-\sigma_{n1},j-\tau_{n1})+\sum_{m=1}^{M}b_m(i,j)u(i+\sigma_{m2},j+\tau_{m2}) \tag{2}$$

αποδεικνύεται, υπό κατάλληλες συνθήκες όσον αφορά στους συντελεστές και στον μη ομογενή όρο αυτής ότι η γενική αυτή εξίσωση συνοδευόμενη από (εν γένει) μιγαδικές αρχικές συνθήκες, έχει μοναδική λύση $u(i,j)$ στο χώρο Hilbert $\ell^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Επιπλέον, δίνεται ένα φράγμα αυτής της λύσης. Εκ του γεγονότος ότι η λύση αυτής της γενικής εξίσωσης ανήκει στον $\ell^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έπεται ότι θα τείνει στο μηδέν, καθώς τα i, j τείνουν στο άπειρο. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνονται πληροφορίες σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της (2). Στη συνέχεια, μελετώνται συγκεκριμένες εξισώσεις, που αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (2), οι περισσότερες εκ των οποίων εμφανίζονται σε προβλήματα Φυσικής, δυναμικής των πληθυσμών και αριθμητικών σχημάτων. Επιπλέον μελετάται και μια εξίσωση διαφορών που δεν εμπίπτει στη γενική κατηγορία (2), προσαρμόζοντας κατάλληλα την τεχνική μας.

Για την κάτωθι γενική κλάση μη γραμμικών, μη ομογενών, εξισώσεων διαφορών δύο μεταβλητών

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}\alpha_n(i,j)u(i-\sigma_{n1},j-\tau_{n1})+\sum_{m=1}^{M}b_m(i,j)u(i+\sigma_{m2},j+\tau_{m2})+\\&+\sum_{k=1}^{K}c_k(i,j)u(i-\sigma_{k3},j+\tau_{k3})+\sum_{l=1}^{\Lambda}d_l(i,j)u(i+\sigma_{l4},j-\tau_{l4})=p(i,j)+\\&+\sum_{s=2}^{\infty}f_s(i,j)[u(i+\sigma,j+\tau)]^s+\sum_{t=1}^{T}q_t(i,j)u(i+\sigma_{t5},j+\tau_{t5})u(i+\sigma_{t6},j+\tau_{t6}),\end{aligned} \tag{3}$$

αποδεικνύεται, υπό κατάλληλες συνθήκες όσον αφορά στους συντελεστές, στον μη ομογενή όρο και στους μη γραμμικούς όρους αυτής ότι η γενική αυτή εξίσωση συνοδευόμενη από (εν γένει) μιγαδικές αρχικές συνθήκες, έχει μοναδική λύση $u(i,j)$ στο χώρο Banach $\ell^1_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Επιπλέον, δίνεται ένα φράγμα αυτής της λύσης, καθώς και μια περιοχή, εξαρτώμενη από τις αρχικές συνθήκες, το μη ομογενή όρο και τους συντελεστές τις εξίσωσης, στην οποία ισχύει η προβλεπόμενη λύση. Εκ του γεγονότος ότι η λύση αυτής της γενικής εξίσωσης ανήκει στον $\ell^1_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ έπεται ότι θα τείνει στο μηδέν, καθώς τα i, j τείνουν στο άπειρο. Με αυτό τον τρόπο λαμβάνονται πληροφορίες σχετικά με την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της (3). Στη συνέχεια, μελετώνται συγκεκριμένες εξισώσεις, που αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της (3), οι περισσότερες εκ των οποίων εμφανίζονται σε προβλήματα δυναμικής των πληθυσμών και αριθμητικών σχημάτων. Επιπλέον μελετώνται και άλλες εξισώσεις διαφορών που δεν εμπίπτουν στη γενική κατηγορία (3), προσαρμόζοντας κατάλληλα την τεχνική μας.

Τέλος, μελετάται μια γραμμική εξίσωση διαφορών τριών μεταβλητών, μια μη γραμμική εξίσωση διαφορών τριών μεταβλητών και μια μη γραμμική εξίσωση διαφορών τεσσάρων μεταβλητών, που εμφανίζονται σ΄ ένα πρόβλημα φυσικής, αριθμητικής ανάλυσης και θεωρίας παιγνίων, αντίστοιχα. Για κάθε μία από αυτές αποδεικνύεται, υπό κατάλληλες συνθήκες, ότι έχουν μία και μόνο μία λύση στους χώρους $\ell^2_{\mathbb{N}^3}$, $\ell^1_{\mathbb{N}^3}$ και $\ell^1_{\mathbb{N}^4}$, αντίστοιχα. Επιπλέον, δίνεται ένα φράγμα της προβλεπόμενης λύσης. Ακόμη στην περίπτωση των μη γραμμικών εξισώσεων, βρίσκεται μια περιοχή, εξαρτώμενη από τις αρχικές συνθήκες (που εν γένει θεωρούμε μιγαδικές) και τις παραμέτρους τις εκάστοτε εξισώσεις, στην οποία ισχύει η προβλεπόμενη λύση.