

# Περιεχόμενα

I	Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις . . . . .	1
1	Βασικές έννοιες και ορισμοί . . . . .	3
1.1	Εισαγωγή . . . . .	3
1.2	Ορισμοί και χαρακτηρισμός διαφορικών εξισώσεων . . . . .	8
1.3	Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων . . . . .	17
2	Συνήθειες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης . . . . .	21
2.1	Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών . . . . .	22
2.2	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις . . . . .	27
2.3	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις . . . . .	34
2.4	Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli . . . . .	43
2.5	Διαφορικές εξισώσεις Riccati . . . . .	46
2.6	Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις και αναγόμενες σε ακριβείς . . . . .	50
2.7	Η προσεγγιστική μέθοδος Picard . . . . .	65
3	Γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης . . . . .	75
3.1	Γενική θεωρία . . . . .	75
3.2	Ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές . . . . .	83
3.3	Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών . . . . .	90
3.4	Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων . . . . .	96
3.5	Διαφορικές εξισώσεις τύπου Euler . . . . .	104
3.6	Η μέθοδος υποβιβασμού τάξης . . . . .	113
4	Συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	121
4.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί . . . . .	121
4.2	Επίλυση συστημάτων με τη μέθοδο της απαλοιφής . . . . .	128
4.3	Γενική θεωρία γραμμικών συστημάτων πρώτης τάξης . . . . .	136

4.4	Επίλυση ομογενών συστημάτων με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων . . . . .	150
4.5	Επίλυση ομογενών συστημάτων με τη μέθοδο διαγωνοποίησης . . . . .	166
4.6	Επίλυση μη ομογενών συστημάτων . . . . .	171
5	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των σειρών . . . . .	177
5.1	Εισαγωγικές έννοιες και βασικά στοιχεία περί σειρών . . . . .	177
5.1.1	Σειρές αριθμών . . . . .	180
5.1.2	Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων . . . . .	186
5.1.3	Δυναμοσειρές . . . . .	189
5.2	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή ενός ομαλού σημείου . . . . .	192
5.3	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή ενός κανονικού ανώμαλου σημείου . . . . .	206
5.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης. Ανακεφαλαίωση . . . . .	228
5.5	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων 2ης τάξης στην περιοχή του απείρου . . . . .	231
5.6	Επεκτάσεις της μεθόδου των σειρών . . . . .	236
6	Προβλήματα συνοριακών τιμών και σειρές Fourier . . . . .	247
6.1	Εισαγωγή . . . . .	247
6.2	Προβλήματα ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων . . . . .	251
6.3	Ορθογώνιες συναρτήσεις . . . . .	270
6.4	Σειρές Fourier . . . . .	276
6.4.1	Τριγωνομετρική μορφή των σειρών Fourier . . . . .	276
6.4.2	Εκθετική μορφή των σειρών Fourier . . . . .	285
6.4.3	Λίγα λόγια για το φαινόμενο Gibbs . . . . .	289
6.5	Προβλήματα Sturm Liouville . . . . .	294
7	Ειδικές συναρτήσεις και ορθογώνια πολυώνυμα . . . . .	299
7.1	Εισαγωγή . . . . .	299
7.2	Η συνάρτηση Γάμμα . . . . .	300
7.3	Η συνάρτηση Βήτα . . . . .	308
7.4	Η συνάρτηση σφάλματος . . . . .	312
7.5	Πολυώνυμα Legendre . . . . .	317
7.6	Πολυώνυμα Hermite . . . . .	329

7.7	Πολυώνυμα Chebyshev . . . . .	339
7.8	Πολυώνυμα Laguerre . . . . .	347
7.9	Συναρτήσεις Bessel . . . . .	359
II	Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους . . . . .	381
8	Βασικές έννοιες και ορισμοί . . . . .	383
8.1	Εισαγωγή . . . . .	383
8.2	Ορισμοί και χαρακτηρισμός διαφορικών εξισώσεων . . . . .	392
8.3	Σχηματισμός διαφορικών εξισώσεων . . . . .	401
9	Απλές βασικές μεθοδολογίες για την επίλυση συγκεκριμένων κλάσεων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	405
9.1	Η λύση του d' Alembert για την κυματική εξίσωση . . . . .	405
9.2	Η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης . . . . .	410
10	Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών . . . . .	413
10.1	Γεωμετρική ερμηνεία μιας ημιγραμμικής ΜΔΕ πρώτης τάξης . . . . .	413
10.2	Μεθοδολογία επίλυσης ημιγραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης . . . . .	415
11	Η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών . . . . .	427
11.1	Γενική «φιλοσοφία» της μεθόδου . . . . .	427
11.2	Εφαρμογή για ομογενείς εξισώσεις με ομογενείς συνοριακές συνθήκες . . . . .	431
11.3	Επεκτάσεις της μεθόδου . . . . .	455
11.3.1	Επέκταση για ομογενείς ΜΔΕ με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες . . . . .	455
11.3.2	Επέκταση για μη ομογενείς ΜΔΕ . . . . .	459
11.4	Εφαρμογή της μεθόδου για εξισώσεις με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές . . . . .	463
III	Ολοκληρωτικοί Μετασχηματισμοί . . . . .	477
12	Εισαγωγικά στοιχεία . . . . .	479
12.1	Γενικές έννοιες και ορισμοί . . . . .	479
12.2	Γενικεύσεις . . . . .	481
12.3	Περιγραφή εφαρμογής ολοκληρωτικών μετασχηματισμών . . . . .	482
13	Μετασχηματισμός Laplace . . . . .	485
13.1	Ορισμός και ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	485

13.2	Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace . . . . .	502
13.2.1	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων . . . . .	502
13.2.2	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	504
13.2.3	Επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων . . . . .	517
13.2.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους .	523
14	Μετασχηματισμός Fourier . . . . .	533
14.1	Ορισμός και ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier . . . . .	533
14.2	Εφαρμογές του μετασχηματισμού Fourier . . . . .	545
14.2.1	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων . . . . .	545
14.2.2	Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	549
14.2.3	Επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων . . . . .	552
14.2.4	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους .	554
IV	Εφαρμογές . . . . .	561
15	Εφαρμογές συνήθων διαφορικών εξισώσεων . . . . .	563
15.1	Βέλος κάμψης συνήθους δοκού . . . . .	563
15.2	Μετατόπιση καλωδίου . . . . .	566
15.3	Κίνηση υλικού σημείου . . . . .	567
15.4	Νόμος ψύξης θέρμανσης του Νεύτωνα . . . . .	572
15.5	Ροή νερού σε μη κορεσμένο πορώδες μέσο . . . . .	575
15.6	Ορθογώνιες τροχιές . . . . .	579
15.7	Συγκέντρωση ρύπου σε υδατόρρευμα . . . . .	584
15.8	Ταλαντώσεις μονώροφων κτιρίων . . . . .	590
15.9	Βέλος κάμψης ορθογωνικής πλάκας . . . . .	616
15.10	Βέλος κάμψης κυκλικής πλάκας . . . . .	619
15.11	Βέλος κάμψης κυλινδρικού κελύφους . . . . .	623
15.12	Περισταλτική ροή ρευστού σε σωλήνες . . . . .	625
15.13	Προσομοίωση κυμάτων . . . . .	627
15.14	Ταλαντώσεις πολυώροφων κτιρίων . . . . .	633
15.15	Περιστροφική κίνηση δίσκων . . . . .	643
15.16	Οικιακή θέρμανση . . . . .	645
15.17	Προβλήματα μίξης . . . . .	649
15.18	Ροή οριακού στρώματος. Το πρόβλημα του Blasius . . . . .	655
15.19	Μη γραμμικές ταλαντώσεις. Η εξίσωση Duffing . . . . .	658

15.20	Μη γραμμικές ταλαντώσεις. Το σύστημα FitzHugh-Nagumo . . .	664
15.21	Λυγισμός στύλου . . . . .	668
15.22	Καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού . . . . .	670
15.23	Ο μονοδιάστατος κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής . . . . .	672
15.24	Προβλήματα ταλαντώσεων που περιγράφονται από ΣΔΕ Bessel .	673
15.24.1	Ταλαντώσεις απλού εκκρεμούς με αυξανόμενο μήκος νήματος . . . . .	673
15.24.2	Μικρές ταλαντώσεις ομοιόμορφης αλυσίδας αναρτημένης από το ένα άκρο της . . . . .	675
15.24.3	Ταλαντώσεις κυλινδρικών μεμβρανών . . . . .	676
15.25	Διάφορα προβλήματα στα οποία εμφανίζονται ΣΔΕ Bessel . . . .	678
15.25.1	Λυγισμός ομοιόμορφου στύλου υπό το βάρος του . . . .	678
15.25.2	Υδάτινα κύματα σε κανάλια . . . . .	679
16	Εφαρμογές διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους . . . . .	683
16.1	Το πρόβλημα της ταλαντούμενης χορδής . . . . .	683
16.2	Προβλήματα ροών που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης . . . . .	689
16.2.1	Κυκλοφοριακή ροή οχημάτων . . . . .	689
16.2.2	Παλιρροϊκά κύματα σε ποτάμια μεγάλου μήκους . . . . .	691
16.3	Συγκέντρωση ρύπου σε υδατόρρευμα . . . . .	692
16.4	Ελεύθερες αξονικές ταλαντώσεις ομοιογενούς ράβδου . . . . .	696
16.5	Αξονικές ταλαντώσεις ανομοιογενούς ράβδου . . . . .	706
16.6	Αξονικές ταλαντώσεις ομοιογενούς ράβδου με απόσβεση . . . . .	710
16.7	Εξαναγκασμένες αξονικές ταλαντώσεις ράβδου . . . . .	713
16.8	Καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού . . . . .	716
16.9	Ταλαντώσεις κυκλικών μεμβρανών . . . . .	720
16.10	Θερμότητα σταθερής κατάστασης σε μια σφαίρα . . . . .	726
16.11	Δυναμικό ταχύτητας ασυμπίεστου ιδεατού ρευστού . . . . .	730
16.12	Διάδοση θερμότητας κατά μήκος μιας ράβδου . . . . .	733
16.13	Ψύξη κυλινδρικής δεξαμενής . . . . .	747
16.14	Διάχυση νετρονίων σ' έναν πυρηνικό αντιδραστήρα . . . . .	750
17	Εφαρμογές ολοκληρωτικών εξισώσεων και ειδικών συναρτήσεων . . . .	759
17.1	Μήκος λημνίσκου . . . . .	759

17.2	Μάζα αστεροειδούς πλάκας . . . . .	761
17.3	Κατανομή ταχυτήτων ιδανικού αερίου . . . . .	762
17.4	Εστίαση ήχου . . . . .	763
17.5	Μετάδοση ισχύος μαγνητικού κύματος . . . . .	765
17.6	Προβλήματα πλακών . . . . .	766
17.6.1	Ορθογωνική πλάκα με απλή στήριξη . . . . .	766
17.6.2	Κυκλική πλάκα επί ελαστικής βάσης . . . . .	767
17.7	Φράγμα ποταμού . . . . .	768
17.8	Προβλήματα ιξοελαστικότητας . . . . .	769
Παράρτημα 1: Συναρτήσεις Heaviside και Dirac . . . . .		773
Π1.1.	Η συνάρτηση Heaviside . . . . .	773
Π1.2.	Η συνάρτηση Dirac . . . . .	775
Παράρτημα 2: Πίνακες, ορίζουσες, συστήματα . . . . .		779
Π2.1.	Ορισμοί, πράξεις και είδη πινάκων . . . . .	779
Π2.2.	Ορίζουσες . . . . .	788
Π2.3.	Επίλυση γραμμικών συστημάτων . . . . .	795
Π2.3.1	Η μέθοδος Cramer . . . . .	796
Π2.3.1	Η μέθοδος Gauss . . . . .	798
Π2.4.	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα . . . . .	806
Π2.5.	Διαγωνοποίηση πινάκων . . . . .	815
Βιβλιογραφία . . . . .		819
Απαντήσεις των ασκήσεων . . . . .		831
Ευρετήριο εφαρμογών . . . . .		845
Ευρετήριο . . . . .		847